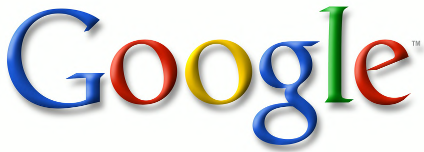
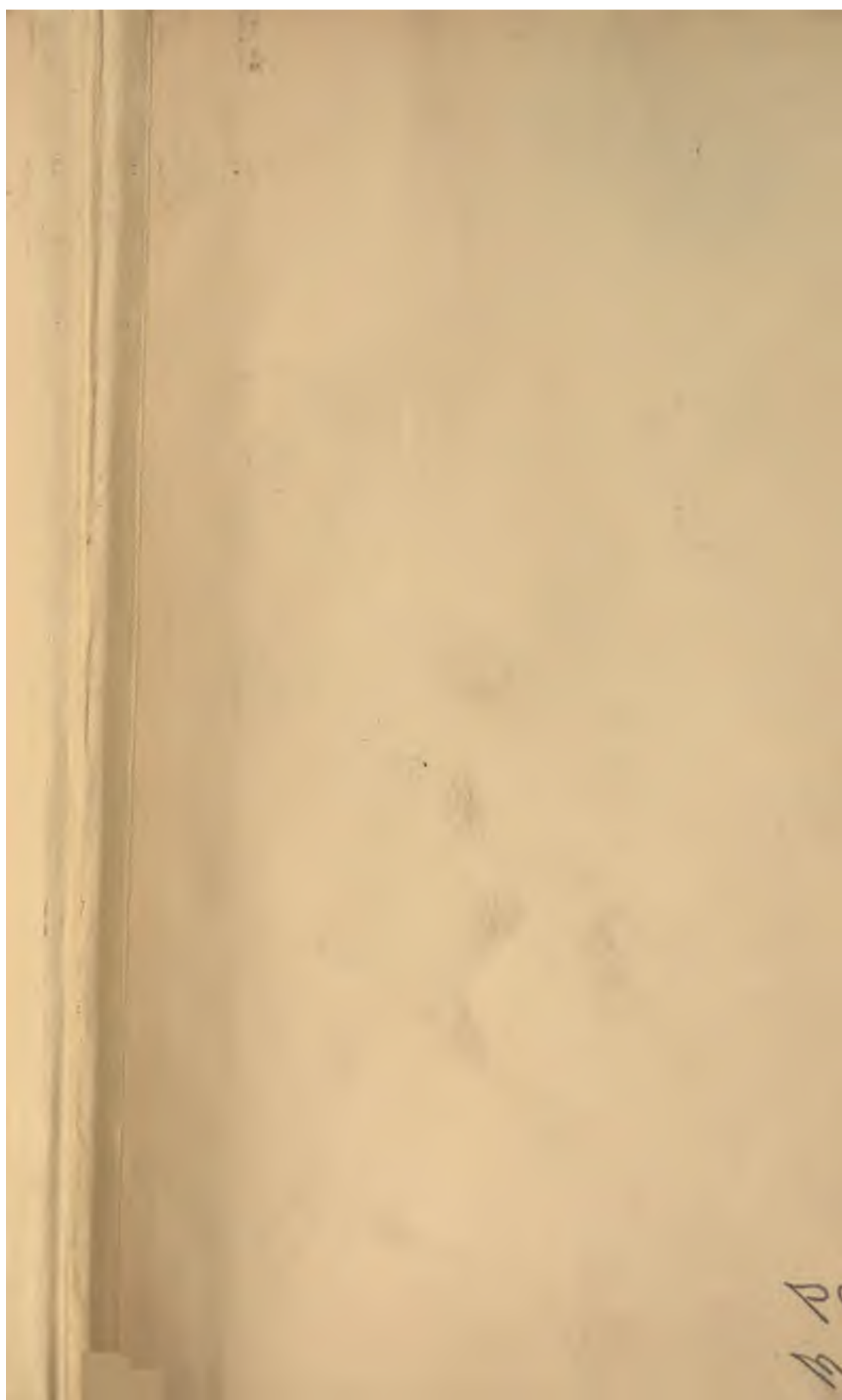






LEÇONS

sur

L'ÉLECTRICITÉ

et

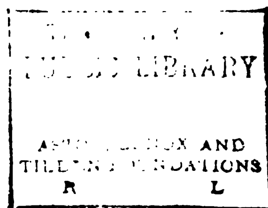
LE MAGNÉTISME

par
E. Mascart
et
J. Joubert

TOME 1

[Part 2]

Paris
1882



QUATRIÈME PARTIE — ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

COURANTS ET FEUILLETS MAGNÉTIQUES

442. Expérience d'Œrsted. — Des expériences anciennes sur les décharges électriques avaient montré déjà que le passage d'un courant dans un fil conducteur est capable de modifier le magnétisme d'une aiguille d'acier. Ces phénomènes, auxquels on n'accorda d'abord qu'une attention médiocre, étaient un premier indice des relations qui existent entre l'électricité et le magnétisme. C'est seulement en 1820, à la suite de l'expérience d'Œrsted, que l'existence de ces relations a été mise en pleine lumière par les immortels travaux d'Ampère.

Lorsqu'un conducteur rectiligne traversé par un courant est approché d'une aiguille aimantée, l'aiguille est, en général, déviée de sa position d'équilibre. Pour définir dans chaque cas les effets assez complexes qui se manifestent suivant les positions respectives de l'aimant et du courant, Ampère a donné une règle très simple : qu'on suppose un observateur couché dans le fil, de manière que le courant entre par les pieds et sorte par la tête ; l'observateur, tournant la face vers l'aiguille, voit toujours le pôle Nord se porter à sa gauche, que nous appellerons désormais la *gauche du courant*. Si l'aiguille était

soustraite à l'action de la Terre et à toute autre action que celle du courant, elle se mettrait en croix avec lui.

443. Champ magnétique d'un courant. — Le fait fondamental qui ressort de l'expérience d'Œrsted est qu'un courant électrique de forme quelconque cree autour de lui un véritable *champ magnétique*.

Ce champ jouit bien des propriétés reconnues d'un champ magnétique ordinaire, car les actions qu'il exerce en un point sur des masses magnétiques égales et de signes contraires sont égales et directement opposées. La force est d'ailleurs proportionnelle à la masse magnétique considérée, car, si l'on met dans le voisinage d'un courant une petite aiguille soumise en même temps à l'action de la Terre, la direction qu'elle prend est indépendante de son moment magnétique ; la résultante des deux forces qui proviennent du champ terrestre et du champ créé par le courant a donc elle-même une direction fixe, et, par suite, ces deux forces gardent entre elles un rapport constant.

L'action du courant change également de signe, sans changer de grandeur, quand on renverse simplement le sens du courant ; ainsi, quand le fil conducteur est replié sur lui-même, les deux portions en contact, qui sont traversées par des courants égaux et de sens contraires, n'ont aucune action sur un pôle d'aimant.

L'existence du champ créé par le courant peut être mise en évidence par le procédé ordinaire des spectres magnétiques. Par exemple, si on répand de la limaille de fer sur une feuille de papier traversée normalement en son milieu par un courant rectiligne, on voit la limaille se distribuer en cercles concentriques à la trace du courant. On en conclut que les lignes de force sont des circonférences dont le centre est l'axe du courant. La force est donc normale en chaque point au plan qui passe par ce point et par le courant ; elle est d'ailleurs dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère.

Les surfaces de niveau successives autour d'un courant rectiligne sont ainsi formées par une série de plans passant par l'axe du fil et faisant entre eux des angles égaux. Il en est de même au voisinage d'un courant quelconque, de sorte que les

surfaces de niveau naissent autour de chaque portion du fil, en faisant entre elles des angles égaux.

444. Action d'un courant rectiligne sur un pôle. — Expériences de Biot et Savart. — Biot et Savart ont déterminé par expérience la grandeur de la force en chaque point. Ils soumettaient à l'action d'un courant vertical une petite aiguille aimantée horizontale placée à diverses distances sur une droite passant par le courant et perpendiculaire au méridien magnétique. Dans ces conditions, la force résultante efficace est la somme de la composante horizontale H du champ terrestre et de la force φ du courant.

On fait d'abord osciller l'aiguille sous l'influence de la Terre seule, puis à des distances a et a' du fil, sous l'influence simultanée de la Terre et du courant. Si on appelle n, N et N' les nombres d'oscillations de l'aiguille en un temps donné t dans ces trois expériences, on a, en désignant par K une constante qui dépend de l'aimantation de l'aiguille et de son moment d'inertie,

$$n^2 = \mathrm{KH},$$
$$\mathrm{N}^2 = \mathrm{K}(\mathrm{H}+\varphi),$$
$$\mathrm{N}'^2 = \mathrm{K}(\mathrm{H}+\varphi').$$

On en déduit

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\mathrm{N}^2 - n^2}{\mathrm{N}'^2 - n^2}.$$

Or, l'expérience a montré qu'en employant la méthode des alternatives pour éliminer l'influence des variations d'intensité du courant, on avait toujours

$$\frac{\mathrm{N}^2 - n^2}{\mathrm{N}'^2 - n^2} = \frac{a'}{a}.$$

Il en résulte $\varphi a = \varphi' a'$, c'est-à-dire que l'action du courant en un point est en raison inverse de la distance.

D'autre part, les expériences relatives à la décharge des batteries, celles de Colladon et de Faraday, en particulier, et les mesures plus précises faites avec le voltamètre, ont montré

que l'action magnétique d'un courant est proportionnelle à la quantité d'électricité qui s'écoule pendant l'unité de temps, c'est-à-dire à l'intensité i du courant.

L'action exercée par un courant rectiligne sur une masse magnétique m située à la distance a peut donc être représentée par l'expression

$$(1) \qquad \varphi = \frac{kim}{a},$$

dans laquelle k est un coefficient qui reste à déterminer.

En réalité, l'action observée dans cette expérience, comme dans celle d'Œrsted, est toujours celle d'un courant fermé ; mais il est facile de reconnaître que, si la portion rectiligne considérée est suffisamment grande et le reste du courant suffisamment éloigné, cette dernière partie du circuit n'exerce qu'une action insensible et que l'effet observé dépend uniquement de la partie la plus voisine. L'action de la portion rectiligne peut alors être considérée comme égale à celle d'un courant rectiligne indéfini. Il en résulte donc la loi suivante de Biot et Savart :

L'action d'un courant rectiligne indéfini sur un pôle est normale au plan qui passe par le courant et par le pôle, dirigée vers la gauche du courant et en raison inverse de la distance du courant au pôle.

Une expérience plus simple, au moins en théorie, conduirait au même résultat. Qu'on suppose une portion du circuit verticale et un aimant placé d'une manière quelconque sur un appareil mobile autour d'un axe coïncidant avec celui du courant. On constatera que le système mobile reste en repos pour toutes les positions de l'aimant, quels que soient le sens et l'intensité du courant. Il résulte de là que les moments par rapport à l'axe des actions exercées sur les différentes masses de l'aimant ont une somme nulle.

Si m est la masse magnétique située à la distance a de l'axe, on aura donc

$$\Sigma m\varphi a = 0.$$

En supposant l'aimant réduit à deux masses $\pm m$ égales et

de signes contraires, situées aux distances a et a' du courant, l'équation se réduit à

$$m(\varphi a - \varphi' a') = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi a = \text{const}^e,$$

c'est-à-dire, la loi de Biot et Savart.

L'expérience porte avec elle sa vérification, car si on cesse de faire coïncider l'axe de rotation avec l'axe du courant, le système se déplace et tend à tourner dans un sens ou dans l'autre pour atteindre une position d'équilibre.

445. Potentiel d'un courant rectiligne indéfini. — Nous allons démontrer que le champ magnétique d'un courant est défini par un potentiel, c'est-à-dire par une fonction dont les dérivées partielles, par rapport aux axes des coordonnées, représentent les composantes respectives de la force prises en signes contraires.

Dans le cas d'un courant rectiligne, les surfaces de niveau sont des plans passant par le courant. Prenons le courant pour

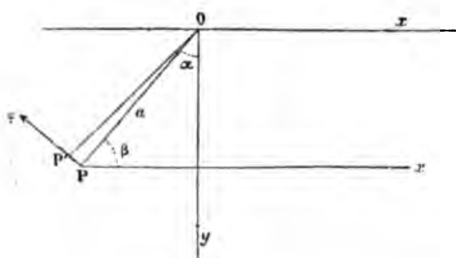


Fig. 96

axe des z et, pour plan des xy, un plan normal au courant passant par le point P (fig. 96). Si on imagine que le courant aille d'avant en arrière de la figure, la force φ en un point P du plan, d'après la règle d'Ampère, est normale à PO et tendrait à faire tourner ce point autour du courant dans le sens des aiguilles d'une montre. Désignons par α l'angle POy. Pour un déplacement très petit, PP', dans le sens de la force, le travail sur une masse positive égale à l'unité serait

$$dT = \varphi \times PP' = \varphi a d\alpha = ki d\alpha.$$

Comme l'angle β que fait la droite PO avec une parallèle Px' à l'axe des x est complémentaire de α, on peut écrire

$$dT = -ki\,d\beta.$$

Ce travail est égal à la diminution correspondante $-dV$ du potentiel ; on en déduit

$$dV = ki\,d\beta,$$

et, par suite,

$$V = ki\beta + C^{te}.$$

Remarquons que l'angle β est l'angle rectiligne de l'angle dièdre des deux plans menés du point P, l'un par le courant, l'autre parallèle au courant et à l'axe des x ; le double de cet angle β mesure la surface ω du fuseau découpé par le dièdre dans une sphère de rayon égal à l'unité ayant son centre en P ; on peut donc écrire

$$V = \frac{ki}{2}\omega + C^{te}.$$

La surface ω n'est autre chose que l'angle solide sous lequel, du point P, on voit le plan des xz indéfini dans un sens et limité de l'autre par le courant, c'est-à-dire la surface apparente de ce plan.

On en conclut que *le potentiel d'un courant rectiligne indéfini en un point est, à une constante près, proportionnel au produit de l'intensité par la surface apparente d'un plan indéfini dans un sens et limité de l'autre par le courant.*

Pour déterminer le signe de cette surface apparente, nous rappellerons que, dans la pratique, le courant rectiligne indéfini fait nécessairement partie d'un circuit fermé et que, si la portion non rectiligne est très éloignée du point P, l'angle sous lequel on voit le circuit entier, que nous pouvons supposer plan, ne diffère que d'une quantité insensible du plan indéfini dont il fait partie. Nous conviendrons d'appeler *face positive* du courant celle qui se trouve à la gauche de l'observateur couché dans le courant et qui regarde vers l'intérieur,

face négative celle qui se trouve à sa droite, et nous prendrons l'angle ω positif ou négatif suivant que du point P on verra la face positive ou la face négative du courant.

446. Le potentiel d'un courant indéfini n'est pas une simple fonction des coordonnées. — En un point donné, l'angle ω ne donne la valeur du potentiel d'un courant indéfini qu'à une constante près. Il est facile de voir quelle est la signification de cette constante. Supposons que la masse positive égale à l'unité considérée au point P (fig. 96) décrive une circonférence autour du point O dans le sens de la force et revienne à sa position primitive. L'angle ω a repris la même valeur, mais la force φ a effectué un travail $\varphi . 2\pi a$, c'est-à-dire $2\pi ki$ ou $4\pi \frac{ki}{2}$, et cette masse a traversé le plan du courant par la face négative. Pour n tours de la masse, ce travail serait égal à $4\pi n \frac{ki}{2}$, et le potentiel aurait diminué de la même quantité $-4\pi n \frac{ki}{2}$.

D'autre part, l'expression $\frac{ki}{2}\omega$ est le travail qu'il faudrait dépenser contre les forces magnétiques pour amener cette masse de l'infini au point P sans traverser le plan du courant.

Si donc, par analogie avec les propriétés des feuillets magnétiques, on appelle potentiel en un point le travail nécessaire pour y amener de l'infini une masse magnétique positive égale à l'unité, ce potentiel a pour expression

$$(2) \qquad V = \frac{ki}{2}\omega - 4\pi n \frac{ki}{2} = \frac{ki}{2}(\omega - 4\pi n).$$

Le potentiel magnétique du courant en un point P n'est donc pas une simple fonction des coordonnées, mais une fonction ayant une infinité de valeurs qui diffèrent les unes des autres d'un multiple de $4\pi \frac{ki}{2}$, c'est-à-dire du travail qui correspond à la rotation complète autour du courant d'une masse magnétique égale à l'unité. Cette propriété peut être facilement généralisée.

447. Potentiel d'un courant angulaire. — Considérons deux courants rectilignes indéfinis AA' et BB' (fig. 97) de même intensité, situés dans le même plan et marchant dans les directions indiquées par les flèches. Soit Q la projection du pôle P sur ce plan. Le potentiel en P du courant AA' est proportionnel à la surface apparente du plan AA'X ; celui de BB' est proportionnel à la surface apparente du plan BB'X.

Avec le sens actuel des courants, et en supposant que leurs plans s'étendent indéfiniment vers la droite, ces deux surfaces apparentes doivent être prises en signes contraires, et le potentiel résultant est proportionnel à leur différence. Or, la

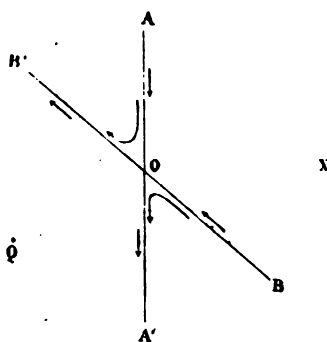


Fig. 97

partie commune AOBX disparaît ; le potentiel est donc proportionnel à la surface apparente de l'angle BOA' diminuée de la surfaee apparente de l'angle AOB'.

D'un autre côté, le système des deux courants indéfinis est identique à celui des deux courants angulaires BOA' et AOB' dont le premier tourne en avant sa face positive, et le second sa face négative.

On peut donc dire que le potentiel en un point P d'un courant angulaire tel que BOA' est proportionnel à sa surface apparente, à une fonction près des coordonnées du sommet de l'angle, fonction dont le signe dépend du signe de la surface tournée vers le point et qui disparaîtra, du reste, dans les applications.

418. Potentiel d'un courant triangulaire. — Supposons en outre qu'il existe dans le même plan un troisième courant CC′ (fig. 98) identique aux premiers, et formant avec eux un triangle *abc*.

Le potentiel en P des deux premiers est proportionnel à la surface apparente de l'angle B*c*A′, moins celle de l'angle A*c*B′. Le potentiel du courant CC′ est proportionnel à la surface apparente du plan CC′X prise avec le signe —. Si l'on ajoute l'effet des trois courants, la partie commune B*ab*A′ disparaît et il reste finalement dans l'expression du potentiel la surface

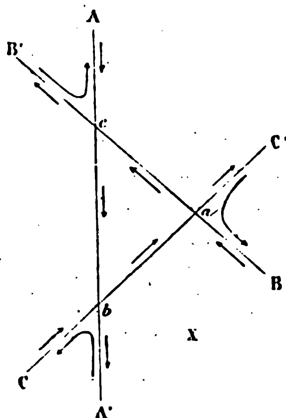


Fig. 98

apparente du triangle *abc* et celles des angles extérieurs A*c*B′, C*b*A′ et B*a*C′, ces dernières étant prises toutes trois négativement.

Ajoutons au système trois courants angulaires de même intensité, figurés par les flèches courbes ; ils introduiront dans le potentiel les surfaces apparentes des mêmes angles, prises cette fois positivement, de sorte qu'il ne restera plus que la surface apparente du triangle. Il ne reste aussi de tous les courants que celui qui circule autour du triangle, puisque chacune des lignes extérieures est parcourue par des courants égaux et de signes contraires.

Ainsi *le potentiel en un point* P *d'un courant fermé triangulaire est proportionnel, à une constante près, à la surface appa-*

rente du triangle entouré par le courant, ou à l'angle solide sous lequel on voit le triangle du point P.

En désignant cet angle solide par ω on a donc

$$V = \frac{ki}{2}\omega + C''.$$

Le théorème s'applique évidemment à un quadrilatère quelconque; en effet, on peut toujours diviser le quadrilatère en deux triangles et supposer qu'il existe le long de la diagonale deux courants égaux et de sens contraires. Par cette addition, on ne change rien au système électrique, et on transforme le courant donné en deux courants triangulaires, présentant du même côté leurs faces positives. Le potentiel est donné par la somme des deux angles apparents des triangles ou par l'angle apparent du quadrilatère.

449. Potentiel d'un courant fermé quelconque. — Par le contour d'un courant fermé nous pouvons mener une surface quelconque et supposer cette surface divisée par deux systèmes de lignes en un nombre quelconque de quadrilatères et de triangles infiniment petits à côtés rectilignes. Si on suppose les contours de chacune de ces figures élémentaires parcourus par des courants de même intensité et de même sens que le courant principal, on obtiendra un système de courants fermés, qui sera équivalent au courant donné, puisque chacune des lignes intérieures est parcourue par deux courants égaux et de signes contraires et que les seules portions efficaces sont celles qui forment par leur ensemble le courant donné. Tous les courants élémentaires ayant leurs faces positives tournées dans le même sens, le potentiel du système est proportionnel à la somme des surfaces apparentes des courants élémentaires, c'est-à-dire à la surface apparente du courant proposé.

Donc, *le potentiel en un point* P *d'un courant fermé quelconque est donné, à une constante près, par solide l'angle sous lequel du point* P *on voit le contour du courant.*

450. Équivalence d'un courant fermé et d'un feuillet magnétique. — Théorème d'Ampère. — Soit ω la valeur de l'angle solide sous lequel du point P on voit le contour du courant,

on a, d'après le théorème qui précède,

$$V=\frac{ki}{2}\omega+C^{te}. \quad (3)$$

Pour un feuillet magnétique de puissance Φ, qui serait terminé au même contour, on aurait (**329**)

$$V=\Phi\omega.$$

Les deux potentiels seront donc égaux, à une constante près, si l'on a

$$\frac{ki}{2}=\Phi=I, \quad (4)$$

le symbole I étant une nouvelle expression de l'intensité du courant définie par cette condition même et que nous appelons l'*intensité électromagnétique*.

Les potentiels du courant et du feuillet pour lesquels $I=\Phi$ ne sont pas absolument identiques, mais ils ne diffèrent que par une constante et leurs coefficients différentiels sont les mêmes. Par suite, les actions exercées par le courant et par le feuillet sont les mêmes pour chaque point du champ. Nous sommes ainsi conduits au célèbre théorème d'Ampère :

L'action magnétique d'un courant fermé est égale à celle d'un feuillet magnétique de même contour.

Les faces positives du courant et du feuillet se correspondent et sont à la gauche de l'observateur placé dans le courant et qui regarde vers l'intérieur du circuit.

Nous avons déduit ce théorème important de l'expérience de Biot et Savart, mais on pourrait le considérer comme un fait expérimental, vérifié par toutes ses conséquences, et l'accepter comme point de départ pour en déduire toutes les propriétés magnétiques des courants.

451. Remarques sur l'équivalence d'un courant fermé et d'un feuillet magnétique. — Il est important d'insister sur les conditions d'équivalence du courant et du feuillet. Nous avons vu qu'avec le feuillet, la force n'est pas une fonction continue des coordonnées : elle est constante dans l'intérieur du feuillet

et change de signe au moment où l'on traverse l'une des surfaces; les lignes de force émanent de part et d'autre de la face positive et sont absorbées par la face négative. Ces changements brusques n'existent pas dans le cas du courant fermé : la force est une fonction continue des coordonnées et les lignes de force sont des courbes fermées qui ne touchent pas le circuit et ne rencontrent aucune masse agissante. On conçoit qu'il puisse en être ainsi sans contradiction ; car le feuillet équivalent au courant est assujetti à la seule condition d'être limité au même contour, et on peut supposer, lorsqu'une masse magnétique se déplace dans le voisinage d'un courant, que le feuillet équivalent se déforme constamment et fuit devant elle sans être jamais rencontré.

L'analogie des deux systèmes devient plus étroite si au lieu de considérer la force magnétique d'un feuillet on considère l'induction. Nous savons, en effet (**324**), que l'induction magnétique est une fonction continue des coordonnées, que le flux d'induction se conserve dans toute l'étendue d'un canal orthogonal, et que la force et l'induction magnétiques ont la même valeur pour tout point situé en dehors des milieux aimantés. En particulier, l'induction magnétique dans l'épaisseur d'un feuillet est identique à la force qui s'y produirait si le feuillet, tout en conservant le même contour et la même puissance magnétique, était déformé de manière à ne plus comprendre le point considéré, et cette force est égale à celle d'un courant équivalent qui suivrait le contour. Il en est évidemment de même pour un ensemble quelconque de courants; d'où l'on déduit cette loi générale :

Un système quelconque de courants fermés équivaut à un système magnétique, et l'action des courants en un point est identique à l'induction au même point du système magnétique équivalent.

452. Énergie relative d'un système magnétique et d'un courant. — Le potentiel d'un courant en un point P est, à une constante près, égal à $-I\omega$, si l'on désigne par ω l'angle solide sous lequel on voit la face négative du courant. Le produit $-mI\omega$ est le travail qu'on dépenserait pour amener depuis l'infini jusqu'en ce point une masse magnétique égale à m sans

traverser une surface continue limitée au courant. L'énergie potentielle de la masse m au point P est donc, à une constante près, égale à $-m\mathrm{I}\omega$.

Si, pour arriver au point P, cette masse a traversé n fois la surface du courant en entrant par la face positive, il a fallu chaque fois dépenser un travail $m\mathrm{I}4\pi$; le travail total est alors

$$m\mathrm{I}(4\pi n-\omega).$$

Inversement, si la masse est abandonnée à elle-même, elle tend à tourner indéfiniment autour du courant et dépense à chaque tour une énergie égale à $m4\pi\mathrm{I}$.

Cette continuité de mouvement n'est pas possible avec deux systèmes magnétiques, parce que le potentiel est alors une fonction déterminée des coordonnées ; elle serait d'ailleurs incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie. Dans le cas des courants le mouvement peut être continu, parce qu'il intervient nécessairement dans le phénomène une énergie étrangère, telle que celle des actions chimiques qui s'effectuent dans les piles.

Si l'on appelle encore Q le flux de force du système magnétique qui traverse la surface du courant en entrant par la face négative, l'énergie relative des deux systèmes a pour expression, à une constante près,

$$(5)\qquad \mathrm{W}=-\mathrm{I}\mathrm{Q}.$$

Lorsque le système magnétique est abandonné à lui-même, le travail $d\mathrm{T}$ des forces magnétiques pour un déplacement infiniment petit quelconque est égal et de signe contraire à la variation d'énergie et on a

$$d\mathrm{T}+d\mathrm{W}=0,$$

ou

$$d\mathrm{T}=\mathrm{I}\,d\mathrm{Q}.$$

Le mouvement du système a donc lieu de telle façon que la valeur de Q tende vers un maximum.

Pour deux positions successives caractérisées par les indices 1 et 2, le travail sera, à une constante près,

$$T_1^2 = I(Q_2 - Q_1).$$

Il est important, en effet, de remarquer que d'une manière générale la différence $Q_2 - Q_1$ ne dépend pas seulement des positions finale et initiale du système magnétique, mais aussi du chemin suivi par chaque masse; car il faudrait ajouter le terme $m4\pi I$ au travail de toutes celles qui auraient contourné l'une des branches du courant. Si un aimant uniforme long et flexible, par exemple, était placé au voisinage d'un courant, le pôle positif tournerait indéfiniment autour du courant dans un sens, le pôle négatif en sens contraire.

Toutefois, si le contour du courant est rigide, ainsi que le système magnétique, toutes les masses qui constituent l'aimant exécutent nécessairement le même nombre n de révolutions et dans le même sens, et le travail correspondant est égal à $n4\pi I\sum m$. Comme la masse totale d'un aimant est toujours nulle, le travail relatif à un déplacement quelconque ne dépend que des positions initiale et finale et non du chemin parcouru; dans ce cas, le travail est nul lorsque l'aimant revient à sa position primitive.

Il est donc impossible d'obtenir le mouvement continu d'un aimant par un courant qui traverse un circuit rigide; l'action réciproque des deux systèmes est alors identique à celle de deux aimants. Les valeurs maximum et minimum du flux de force Q correspondent à des positions d'équilibre relatif, stables dans le premier cas et instables dans le second. Le mouvement peut être continu, au contraire, si le circuit est déformable, s'il contient, par exemple, des parties liquides, des contacts glissants, ou s'il peut être brisé en certains points pendant que l'aimant se déplace.

453. Action réciproque de deux courants fermés. — Un courant fermé et un feuillet, équivalents vis-à-vis d'un système magnétique quelconque, le sont-ils encore vis-à-vis d'un autre courant? Ainsi, le courant C_1 et le feuillet S_1 de même contour sont équivalents vis-à-vis du système magnétique M_2;

supposons que ce système magnétique soit un feuillet S_2 ; l'action réciproque qui s'exerce entre S_1 et S_2 est identique à celle qui s'exerce entre S_1 et le courant C_2 équivalent à S_2 ; mais cette dernière action est-elle la même que celle qui s'exercerait entre les deux courants C_1 et C_2 ? L'affirmative paraît probable ; mais ce n'est là qu'une induction et il serait facile de trouver des exemples pour lesquels le même mode de raisonnement conduirait à des conséquences manifestement erronées. Ainsi, dans des conditions convenablement choisies, il peut se faire que les actions exercées sur un aimant par un aimant et par un morceau de fer doux soient les mêmes; on n'en saurait conclure que le fer doux et l'aimant seraient encore équivalents vis-à-vis d'un autre morceau de fer doux.

C'est donc comme un résultat expérimental, et non comme une déduction nécessaire de la théorie, que nous admettrons le théorème suivant d'Ampère :

L'action réciproque de deux courants fermés est identique à celle des deux feuillets magnétiques respectivement équivalents à chacun d'eux.

454. Énergie relative de deux courants. — L'énergie potentielle de deux feuillets magnétiques a pour valeur (**341**)

$$W = -\Phi\Phi' M.$$

D'après le théorème d'Ampère, celle de deux courants fermés sera exprimée, à une constante près, par la formule

$$W = -II'M, \tag{6}$$

dans laquelle I et I' sont les intensités des deux courants, et M le flux de force qui, émanant de l'un des circuits, traverse l'autre par sa face négative, lorsque l'intensité dans chacun d'eux est égale à l'unité.

Le travail dT des forces magnétiques correspondant à un déplacement infiniment petit sera donné par l'équation

$$dT = -dW = -II'dM. \tag{7}$$

455. Rotations électromagnétiques. — Nous avons vu (452) que l'action réciproque d'un aimant et d'un courant rigide ne peut pas produire un mouvement continu. Il en serait de même pour deux courants rigides, mais l'impossibilité cesse si l'un des systèmes est déformable, et les considérations qui précèdent permettent d'expliquer simplement la plupart des expériences de cette nature.

Considérons, par exemple, un courant indéfini rectiligne dont la trace est en O (fig. 99), et un aimant PP' dont l'un des pôles P' est assujetti à se déplacer dans une glissière AB perpendiculaire au courant, tandis que l'autre pôle P peut décrire une circonférence autour du courant, grâce à un contact mobile qui lui livre le passage à chaque tour. Le pôle P tour-

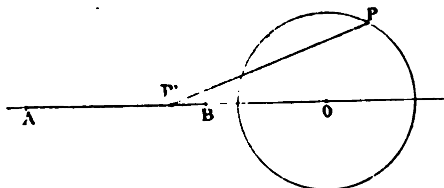


Fig. 99

nera indéfiniment autour du courant et, abstraction faite des frottements, sa vitesse ira en s'accélérant, parce que l'action magnétique du courant fournit à chaque rotation un travail égal au produit de $4\pi I$ par la masse du pôle. En réalité il s'établit un régime régulier, à partir du moment où les résistances passives font équilibre à la force motrice. Nous verrons plusieurs exemples de mouvements continus du même genre dans un des chapitres suivants.

L'action d'un courant sur lui-même peut donner lieu aussi à des déformations ou à des mouvements continus.

Soit ACB (fig. 100) une portion d'un circuit mobile autour d'un axe passant par les deux points A et B par lesquels elle se rattache au circuit général. On peut imaginer que la ligne AB est parcourue par deux courants de sens contraires, de même intensité que le courant lui-même, et décomposer ainsi le système en deux circuits fermés distincts s et s'.

S'il n'existe pas dans le champ d'autres forces que celles qui proviennent de ces deux circuits, l'énergie relative des deux courants est

$$W = -I^2M.$$

Comme l'énergie tend vers un minimum, la partie mobile se déplacera de façon que le flux de force M soit maximum.

Si les deux contours s et s' sont plans, il est clair que la partie mobile s se placera dans le plan s' de manière à en

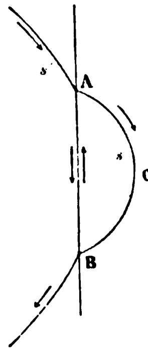


Fig. 100

former le prolongement ; on le voit d'une manière évidente par l'action qu'exerceraient l'un sur l'autre les deux feuillets magnétiques équivalents.

Si le circuit général est formé d'un fil flexible d'une longueur déterminée, l'action du courant sur lui-même tendra à lui donner une surface maximum, c'est-à-dire à lui faire prendre la forme d'une circonférence de cercle.

Si le fil est élastique, il s'allongera jusqu'à ce que l'élasticité fasse équilibre aux forces électromagnétiques.

456. Expériences de Faraday. — Dans certains cas la formule fondamentale

$$W = -IQ$$

paraît en défaut, des mouvements continus pouvant être pro-

duits, alors que le flux de force qui traverse le circuit mobile semble nul ou invariable.

Considérons, par exemple, un arc ACB de courbe plane (fig. 101), mobile autour d'une droite AB passant par l'axe d'un aimant PP′, l'une des extrémités étant placée entre les deux pôles et l'autre en dehors, et supposons qu'un courant aille du point A au point B par l'arc ACB. Le flux de force magnétique émanant du pôle P qui traverse la portion ACB du circuit paraît nul puisque le pôle est dans le plan du circuit et, d'ailleurs, l'arc ACB paraît dans tous les azimuts avoir une situation identique

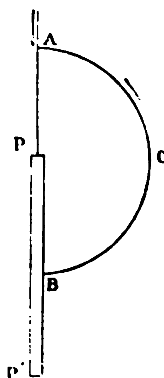
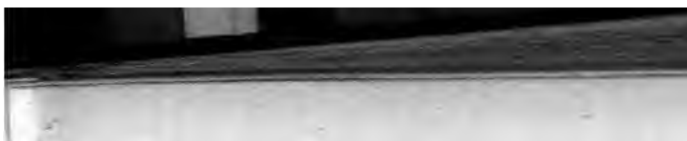


Fig. 101

par rapport au pôle. Cependant l'arc ACB prend un mouvement de rotation continu qui, si le pôle P est un pôle Nord, le fait tourner, pour un observateur placé au-dessus du point A, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pour analyser le phénomène, substituons au courant le feuillet équivalent; nous pouvons supposer que la partie mobile de ce feuillet est constituée par une lame élastique indéfiniment extensible, qui forme en arrière du pôle une surface concave et présente au pôle sa face négative. Cette surface tendant à embrasser une plus grande portion du flux marchera dans le sens indiqué et le mouvement sera continu, le feuillet élastique pouvant s'enrouler sur lui-même indéfiniment.

La variation du flux de force pour une rotation θ du plan du courant sera égale à $2m\theta$; le travail des forces électroma-



gnétiques relativement à ce pôle sera $2m\theta I$ pour le déplacement θ et, pour un tour entier, $4\pi m I$.

Le moment du couple de rotation par rapport à l'axe est donc exprimé par

$$\frac{4\pi m I}{2\pi} = 2mI;$$

il est à remarquer que ce moment est indépendant de la grandeur et de la forme de l'arc.

Quant à l'action du pôle inférieur P', elle est évidemment nulle ; car une portion quelconque du flux de force émané de ce point et qui rencontre le feuillet le traverse nécessairement deux fois, en entrant d'abord par la face positive, puis par la face négative ; il ne peut y avoir, de ce chef, aucune variation d'énergie et, par suite, aucune cause de mouvement.

Si les deux pôles étaient en dehors de la ligne AB qui joint les extrémités du courant mobile, l'action de chacun d'eux serait nulle, et il n'y aurait pas de rotation. De même, si les deux pôles étaient dans l'intervalle AB, la variation totale du flux de force relative à un déplacement quelconque de l'arc serait nulle, puisque les deux pôles donneraient des variations égales et contraires. L'arc doit encore rester immobile.

Ces différentes expériences sont dues à Faraday.

457. Autre forme de l'expression du travail électromagnétique. — Dans l'exemple précédent, le travail $2mI\theta$ correspondant à une rotation θ est égal au produit de *l'intensité du courant par le flux de force coupé par l'arc ACB dans le déplacement.* Il est facile de généraliser l'expression du travail sous cette nouvelle forme.

Considérons, en effet, un système magnétique fixe dans le champ duquel un courant éprouve un déplacement ou une déformation quelconque. Soient s et s' les deux positions successives du courant (fig. 102), et Q et Q' les flux de force du système magnétique qui traversent la face négative dans les deux cas. Le travail correspondant des forces électromagnétiques est $I(Q'-Q)$.

Menons deux plans P et P' tangents aux deux positions du circuit; joignons les points de contact AA' et BB', et désignons

par Q_1 et Q_2 les flux correspondant aux surfaces A'ACBB'C' et A'ADBB D. On a évidemment

$$Q' \quad Q = Q_2 - Q_1.$$

Mais Q_2 est le flux de force coupé par l'arc BDA, Q_1 le flux coupé par l'arc ACB pendant le déplacement ; on peut donc dire que le travail des forces électromagnétiques est égal à l'excès du flux coupé par l'une des portions de circuit sur le flux coupé par l'autre. Si les forces traversent le plan de figure d'avant en arrière, les valeurs des flux sont positives pour le sens du courant indiqué par la flèche.

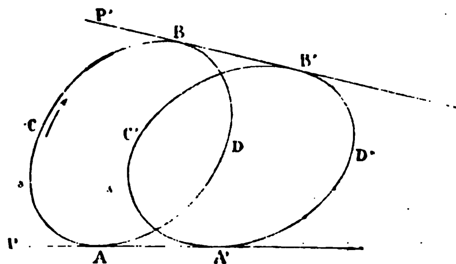


Fig. 102

Pour les éléments de la courbe ACB le mouvement a lieu à la droite d'un observateur qui serait placé dans le courant et regarderait dans la direction de la force, et le flux de force coupé entre avec le signe — dans l'expression du travail. Pour la courbe BDA le mouvement a lieu vers la gauche et le flux de force coupé se trouve pris avec le signe +.

Si l'on convient de donner le signe + au flux de force coupé par le circuit quand le mouvement a lieu vers la gauche de l'observateur et le signe — quand il a lieu vers la droite, on peut dire que le travail total est égal à la somme algébrique des flux de force coupés par le courant.

158. Action électromagnétique sur un élément de courant. — Nous sommes ainsi amenés à considérer l'action qui s'exerce sur un courant comme résultant des actions qui s'exercent sur chacun des éléments dans lequel on peut le supposer dé-



composé : c'est le même problème que pour un feuillet magnétique (311). Pour appliquer le résultat obtenu aux courants, il suffit de remplacer la puissance magnétique du feuillet par l'intensité du courant, et la force qui s'exerce sur chaque élément a pour expression

$$(8) \qquad \mathrm{I}F\,ds \sin\alpha = \mathrm{I}\,dA,$$

dA étant l'aire du parallélogramme construit sur $F\,ds$. Ainsi :

L'action qui s'exerce sur un élément de courant placé dans un champ magnétique est égale au produit de l'intensité du courant par l'aire du parallélogramme construit sur une droite représentant l'intensité du champ et sur l'élément de courant. Cette force est normale au parallélogramme et dirigée vers la gauche de l'observateur placé dans le courant et qui regarde dans la direction de la force.

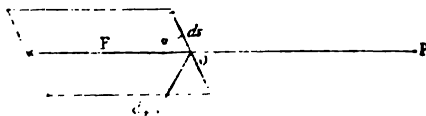


Fig. 103

Si le champ est dû à un pôle unique de masse m placé en P (fig. 103) à une distance r de l'élément, on a $F = \frac{m}{r^2}$; il en résulte que l'action réciproque d'un élément de courant et d'un pôle a pour expression

$$(9) \qquad d\varphi = \frac{m\mathrm{I}}{r^2}\,ds \sin\alpha.$$

L'action est donc en raison inverse du carré de la distance du pôle à l'élément; elle est appliquée à l'élément et perpendiculaire au plan qui passe par l'élément et par le pôle.

459. Action réciproque de deux éléments de courant. — Nous avons vu (317) que l'action de deux feuillets peut s'exprimer en fonction des deux contours. L'action de deux courants peut donc être considérée comme la résultante des actions exercées entre les éléments de courant qui les constituent.

Cette action élémentaire $d^2\psi$ n'est pas déterminée, mais, si l'on admet qu'elle a lieu suivant la droite qui joint les deux éléments, elle a pour expression

$$d^2\psi = -\frac{4\,\mathrm{II}'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

En appelant θ et θ' les angles des deux éléments avec la droite qui les joint et ε l'angle que font entre eux les deux éléments, on obtient

$$(10) \qquad d^2\psi = +\frac{2\,\mathrm{II}'}{r^2}\left\{\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right\}ds\,ds'.$$

Les formules (9) et (10) représentent les lois élémentaires découvertes par Ampère.

La méthode suivie par Ampère pour arriver à ce résultat était toute différente, elle fera l'objet du chapitre suivant.

460. Intensité électromagnétique du courant. — Nous avons défini jusqu'ici l'intensité du courant par la quantité d'électricité qui passe par une section de circuit dans chaque unité de temps. L'intensité ainsi définie est appelée l'*intensité électrostatique ;* elle peut être déterminée par des mesures de capacités et de potentiels ou par les phénomènes électrochimiques. L'intensité électromagnétique, introduite plus haut (**150**), se trouve définie par la condition d'être exprimée par le même nombre que la puissance magnétique du feuillet de même contour qui lui est équivalent. On en déduit

$$(11) \qquad \mathrm{I} = \frac{ki}{2}.$$

Nous verrons plus loin quelle est la signification de ce facteur $\frac{k}{2}$.

Avec la nouvelle expression de l'intensité, l'action d'un courant rectiligne indéfini à la distance a devient

$$(12) \qquad \varphi = \frac{2\mathrm{I}}{a}.$$

Par suite, l'*intensité électromagnétique égale à l'unité est celle du courant rectiligne indéfini qui exerce à l'unité de distance une force magnétique égale à 2.*

461. Unités électromagnétiques. — Ce changement dans l'expression de l'intensité amène nécessairement des modifications correspondantes dans l'évaluation des autres quantités électriques. Si l'on veut que l'intensité représente toujours la quantité d'électricité qui traverse une section du conducteur dans l'unité de temps, l'équation

$$Q = It$$

déterminera Q et par suite l'unité d'électricité.

Si le courant ne produit pas d'autre travail que l'échauffement du circuit, la loi de Joule déterminera l'expression de la résistance, et par suite l'unité de résistance, par la relation

$$W = I^2Rt,$$

dans laquelle W représente l'énergie calorifique recueillie pendant le temps t.

Enfin, la force électromotrice sera donnée par l'équation

$$W = EIt.$$

Les unités ainsi définies et qu'on appelle *unités électromagnétiques* sont celles que nous emploierons dans les chapitres suivants. Nous établirons plus loin les relations qui existent entre elles et les *unités électrostatiques*.

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTIONS ÉLÉMENTAIRES

462. Méthode d'Ampère. — La marche que nous venons de suivre est, pour ainsi dire, l'inverse de celle qui a conduit Ampère à la loi des actions élémentaires. L'importance du sujet et l'intérêt que présentent les raisonnements et les expériences d'Ampère justifieront le nouvel exposé que nous allons faire de la question d'après les idées de l'illustre physicien.

Ampère considère les actions exercées par les courants, sur les aimants ou sur les courants, comme la résultante des actions dues à chacun des éléments de longueur dans lesquels on peut décomposer le courant, et il cherche à déduire de l'expérience la loi de ces actions élémentaires.

Si on examine jusqu'à quel point une loi élémentaire, ainsi définie, est directement accessible à l'expérience, on voit qu'à la rigueur il est possible d'étudier l'action d'un seul pôle sur un élément de courant, en opérant avec un aimant solénoïdal assez long pour qu'on puisse négliger l'action de l'autre pôle et une portion du courant rendue mobile aussi petite qu'on le voudra ; mais il n'en est plus de même lorsqu'on envisage l'action d'un élément de courant sur un pôle ou l'action réciproque de deux éléments de courant. Sur un élément de courant rendu mobile, comme sur un pôle, on ne peut faire agir que le circuit entier du courant ou, dans tous les cas, un *courant fermé*.

La recherche d'une loi élémentaire, à la manière dont Ampère envisage le problème, répond donc, au moins dans

le second cas, à une conception purement mathématique; mais la méthode n'en est pas moins légitime tant qu'on se propose seulement de déterminer l'action résultante du circuit tout entier, la loi élémentaire étant alors soumise à la seule condition que l'intégrale relative à un circuit fermé donne un résultat conforme à l'expérience. Mais il est évident aussi que le problème ainsi posé n'est pas complètement déterminé et qu'il peut y avoir plusieurs lois élémentaires satisfaisant à cette condition fondamentale.

463. Action d'un pôle sur un élément de courant. — Principes fondamentaux. — Dans l'exposé de sa méthode, Ampère s'appuie sur les principes suivants qui peuvent être considérés, les uns comme des axiômes évidents, et les autres comme des faits d'expérience.

I. *Égalité de l'action et de la réaction.* — L'action d'un aimant sur un courant est égale et directement opposée à l'action du courant sur l'aimant. Cette loi générale de la nature se vérifie par expérience dans le cas actuel, car si on lie un aimant et un courant, le système rendu libre ne prend aucun mouvement.

II. *L'action change de signe avec le signe du pôle et avec le sens du courant.* — Ce fait est un résultat d'expérience. L'action reste la même quand on change à la fois le signe du pôle et le sens du courant.

III. *Principe des courants sinueux.* — L'action d'un courant sinueux sur un aimant est identique à celle du courant rectiligne qui aurait les mêmes extrémités.

Pour vérifier ce principe, Ampère a montré que deux fils conducteurs aboutissant aux mêmes extrémités, l'un rectiligne et l'autre sinueux, ont une action nulle sur un aimant quelconque quand ils sont traversés en sens contraires par le même courant.

Quelques restrictions sont ici nécessaires : le courant sinueux doit être de même ordre de grandeur que le courant rectiligne, et s'en écarter très peu; il ne faut pas non plus qu'il tourne autour du courant rectiligne. On ne se servira d'ailleurs de ce principe que pour remplacer un élément par ses trois projections.

IV. *L'action d'un aimant quelconque et, par suite, d'un pôle sur un élément de courant est normale à l'élément.*

Ampère a vérifié ce principe de la manière suivante. Un arc de cercle métallique mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan peut glisser sur deux gouttes de mercure par lesquelles entre et sort le courant qui le traverse. Un aimant quelconque placé dans le voisinage laisse l'arc immobile. L'action de l'aimant est donc située dans un plan qui passe par l'axe de rotation et, par suite, perpendiculaire au courant mobile. L'arc se met d'ailleurs en mouvement sitôt que l'axe cesse de passer par le centre.

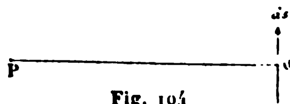


Fig. 104



Fig. 105



Fig. 106

V. *L'action d'un aimant sur un élément de courant est appliquée à l'élément.* — Cela résulte de l'expérience suivante due à M. Liouville. Une portion de courant rectiligne est rendue mobile autour de son axe ; à cet effet, elle plonge par ses extrémités dans deux petits godets remplis de mercure et qui amènent le courant. L'élément rectiligne ne prend aucun mouvement de rotation, de quelque manière qu'on lui présente un aimant.

VI. *Principe de symétrie.* — L'application du principe de symétrie achèvera de déterminer la direction de la force.

On voit d'abord que :

1° L'action d'un pôle sur un élément de courant, perpendiculaire à la droite qui le joint au pôle, est normale au plan

qui passe par le pôle et par l'élément. Joignons le pôle P au milieu O de l'élément *ds* (fig. 104). Nous savons déjà que l'action est perpendiculaire à l'élément. Elle est également perpendiculaire à la droite PO, car si on fait tourner la figure de 180° autour de cette droite, la force doit changer de signe sans changer de direction (II);

2° L'action d'un pôle sur un élément de courant dont la direction prolongée passe par le pôle est nulle. Cette action doit être perpendiculaire à l'élément *ds* (fig. 105); d'autre part, elle ne doit pas changer de direction quand on fait tourner l'élément d'une quantité quelconque autour de la droite PO; elle est donc nulle.

Soit maintenant un élément *ds* (fig. 106) qui fait un angle α avec la droite qui le joint au pôle; on peut remplacer l'élément de courant *ds* par ses deux projections $ds\cos\alpha$ et $ds\sin\alpha$, l'une suivant la droite PO, l'autre dans une direction perpendiculaire.

L'action du pôle sur la première est nulle; il ne reste donc que l'action du pôle sur $ds\sin\alpha$. Cette dernière est proportionnelle, comme on l'a vu, à la masse m du pôle, à l'intensité i du courant; elle est aussi proportionnelle à la longueur $ds\sin\alpha$ de l'élément, et enfin à une certaine fonction de la distance $f(r)$. On peut donc écrire, en appelant $d\varphi$ cette force et k un coefficient qui reste à déterminer par expérience,

$$d\varphi = mkids\sin\alpha f(r).$$

La force est d'ailleurs appliquée à l'élément et normale au plan P*ds*. Quant à sa direction, elle est à la droite du courant, c'est-à-dire à la droite d'un observateur couché dans l'élément et qui regarde le pôle, puisque l'action de l'élément sur le pôle s'exerce dans le sens opposé.

VII. *Loi de Biot et Savart.* — Les expériences de Biot et Savart (**441**) ont établi que l'action magnétique d'un courant rectiligne sur un pôle est en raison inverse de la distance du courant au pôle.

Suivant une remarque de Laplace, on satisfait à cette loi si l'on admet que *l'action d'un pôle sur un élément de*

courant est en raison inverse du carré de la distance, c'est-à-dire si l'on a $f(r) = \frac{1}{r^2}$. On peut démontrer réciproquement que la loi du carré est la seule qui satisfasse aux expériences de Biot et Savart.

Considérons, en effet, deux courants rectilignes parallèles, indéfinis et de même intensité AS et A'S', à des distances a et a' du pôle P (fig. 107). Pour deux éléments ds et ds' com-

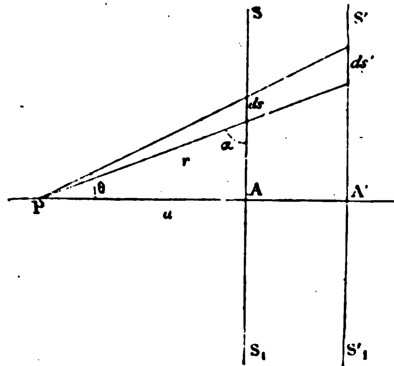


Fig. 107

pris entre deux mêmes rayons vecteurs menés par le point P, et dont les distances à ce point sont r et r', on a

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{r}{r'} = \frac{a}{a'},$$

et, par suite,

$$r ds' = r' ds.$$

Le rapport des actions $d\varphi$ et $d\varphi'$ du pôle sur les éléments ds et ds' devient alors

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{ds \sin\alpha \frac{1}{r^2}}{ds' \sin\alpha \frac{1}{r'^2}} = \frac{r'.r' ds}{r.r ds'} = \frac{r'}{r} = \frac{a'}{a}.$$

Les actions des éléments correspondants étant dans le

rapport inverse des distances a et a', il en sera de même pour les résultantes. C'est la loi donnée par l'expérience. L'action d'un pôle sur un élément de courant a donc pour expression

$$d\varphi = mki\frac{ds \sin\alpha}{r^2}.$$

Comme toutes ces forces sont parallèles et de même sens, l'action du pôle sur le courant rectiligne indéfini est

$$\varphi = mki\int\frac{ds \sin\alpha}{r^2} = mki\int\frac{ds\cos\theta}{r^2}.$$

En comptant la longueur du circuit à partir du point A, on a

$$s = a\operatorname{tang}\theta, \quad ds = a\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$
$$a^2 = r^2\cos^2\theta;$$

il en résulte

$$\frac{ds\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{a}\cos\theta\, d\theta,$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{mki}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{2mki}{a}.$$

Cette force est appliquée au point A, par raison de symétrie, et l'action du courant rectiligne sur le pôle est appliquée au même point et en sens opposé.

Ce dernier résultat paraît d'abord contraire à l'expérience, puisqu'en réalité l'action du courant sur le pôle est appliquée au pôle lui-même. La contradiction tient à ce que dans la pratique le courant est nécessairement fermé. Si l'on suppose pour simplifier que le circuit général soit dans un plan passant par le point P, les actions $d\varphi$ et $d\varphi'$ de deux éléments correspondants ds et ds' situés dans l'angle $d\theta$ sont de sens contraires et en raison inverse des distances r et r'. La portion qui ferme le circuit étant supposée très éloignée, la différence des deux forces est sensiblement égale à l'action de l'élément ds; mais, comme on a $r d\varphi = r' d\varphi'$, le point d'application de la résultante

partielle est le pôle P. Il en est de même pour la résultante générale. Quant à l'action du circuit entier, elle est égale sensiblement à celle de la partie rectiligne.

Si l'on exprime l'intensité au moyen de l'unité électromagnétique (**460**), l'action du courant indéfini sur le pôle m placé à la distance a a pour expression $m\frac{2I}{a}$, et la formule élémentaire devient

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{mI\,ds\sin\alpha}{r^2},$$

ou, en remarquant que $\frac{m}{r^2}$ est l'action magnétique F de la masse m au point occupé par l'élément de courant

$$(2) \qquad d\varphi = IF\,ds\sin\alpha = I\,dA,$$

en désignant par dA la surface du parallélogramme construit sur l'élément et sur la force F.

L'action qui s'exerce sur le courant $I\,ds$ situé dans un champ magnétique ne dépend que de l'intensité du champ en ce point, quel que soit le système d'où provient la force. On a ainsi le théorème déjà énoncé plus haut (**458**) :

L'action qui s'exerce sur un élément de courant placé dans un champ magnétique est égale au produit de l'intensité du courant par l'aire du parallélogramme construit sur l'élément de courant et sur l'intensité du champ. Cette force est normale au plan du parallélogramme et dirigée vers la gauche de l'observateur placé dans le courant qui regarderait dans la direction du champ.

Le plan du parallélogramme, auquel la force électromagnétique est perpendiculaire, a été appelé par Ampère le *plan directeur*.

Bien que nous ayons donné le nom d'élémentaire à la force que nous venons de définir, cette force ne peut être considérée comme telle au sens strict du mot : ainsi que le fait remarquer Ampère, « on ne peut appeler force élémentaire, ni une force qui se manifeste entre deux éléments qui ne sont pas de même

nature, ni une force qui n'agit pas suivant la droite qui joint les deux points entre lesquels elle s'exerce. »

461. Action réciproque d'un pôle et d'un courant. — En partant de cette loi élémentaire, on démontrera, comme plus haut (**346**), que l'action d'un pôle égal à l'unité placé à l'origine des coordonnées sur l'élément ds d'un courant, situé en un point dont les coordonnées sont x, y et z, a pour composantes

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\xi &= \frac{1}{r^3}(y\,dz - z\,dy), \\ d\eta &= \frac{1}{r^3}(z\,dx - x\,dz), \\ d\zeta &= \frac{1}{r^3}(x\,dy - y\,dx). \end{aligned}$$

On peut remarquer que le moment dM_z de cette force par rapport à l'axe de z est

$$dM_z = x\,d\eta - y\,d\xi = \frac{1}{r^3}\Big[z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)dz\Big].$$

L'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

donne

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr.$$

Il en résulte

$$dM_z = \frac{1}{r^3}\Big[z(r\,dr - z\,dz) - (r^2 - z^2)dz\Big] = \frac{1}{r^2}(z\,dr - r\,dz) = -\,\mathrm{I}\,d\frac{z}{r}.$$

Or, $\frac{z}{r}$ est le cosinus de l'angle γ que fait la droite r avec l'axe des z ; on a donc

$$dM_z = -\,\mathrm{I}\,d\cos\gamma,$$

de sorte que le moment M_z des actions exercées par le pôle sur un arc quelconque AB a pour valeur

$$(4) \qquad M_z = \mathrm{I}(\cos\gamma_a - \cos\gamma_b).$$

Si le circuit est fermé, ce moment est nul et, comme la direction de l'axe des z a été choisie arbitrairement, on voit que *l'action d'un pôle sur un courant fermé passe par le pôle.* Inversement, *l'action d'un courant fermé sur un pôle passe aussi par le pôle.*

465. — Au lieu de suivre la marche adoptée, et de vérifier que la loi de Biot et Savart est satisfaite par une action en raison inverse du carré de la distance, on aurait pu, ce qui eût été plus rigoureux, laisser indéterminée la fonction $f(r)$ et admettre comme un fait expérimental que l'action d'un courant fermé sur un pôle passe par le pôle.

Le moment par rapport à l'axe des z de l'action du pôle sur l'élément ds serait alors

$$dM_z = -I\, r^2 f(r)\, d\cos\gamma,$$

et le moment relatif à un arc AB

$$M_z = -I \int_A^B r^2 f(r) d \cos\gamma = I \int_B^A r^2 f(r) d \cos\gamma.$$

En intégrant cette expression par parties, il vient

$$M_z = I\, [r^2 f(r) \cos\gamma]_B^A - I \int_B^A \cos\gamma\, d\,[r^2 f(r)].$$

Si le courant est fermé, le premier terme du second membre est nul. Comme le moment doit être nul quel que soit la forme du circuit parcouru par le courant, il faut que le second terme soit identiquement nul, c'est-à-dire que le produit $r^2 f(r)$ soit une constante et, par suite, que la force soit en raison inverse du carré de la distance.

Si l'arc, sans être fermé, aboutit à deux points A et B d'une droite autour de laquelle il puisse tourner, le couple de rotation ne sera pas nul en général.

Supposons, par exemple, que les points A et B soient situés sur une même droite passant par le pôle et d'un même côté du pôle ; le moment des forces par rapport à cet

axe est nul, et le courant ne prendra aucun mouvement de rotation autour de la droite.

Au contraire, si les points A et B sont de part et d'autre du pôle, les angles γ_b et γ_a sont égaux l'un à zéro et l'autre à π; dans ce cas, le couple de rotation sera égal à 2I et l'arc tournera indéfiniment dans le même sens.

Nous retrouvons ainsi l'explication des diverses particularités de l'expérience de Faraday (**456**).

466. — Les composantes X, Y et Z de l'action d'un courant sur un pôle placé à l'origine des coordonnées sont, d'après ce qui précède,

$$(5)\qquad \begin{aligned} X &= -I\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3},\\ Y &= -I\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3},\\ Z &= -I\int\frac{x\,dy - z\,dy}{r^3}. \end{aligned}$$

Si on pose

$$(6)\qquad \begin{aligned} A &= \int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} = G\cos\lambda,\\ B &= \int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} = G\cos\mu,\\ C &= \int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} = G\cos\gamma, \end{aligned}$$

avec la condition

$$A^2 + B^2 + C^2 = G^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} X &= -IA = -IG\cos\lambda,\\ Y &= -IB = -IG\cos\mu,\\ Z &= -IC = -IG\cos\nu, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7)\qquad F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = IG.$$

Le facteur G est l'action au point P du circuit considéré, quand il est traversé par un courant d'intensité égale à l'unité.

On peut représenter cette action par une droite PG proportionnelle à G et faisant les angles λ, μ, ν avec les axes.

467. Équivalence d'un courant et d'un feuillet magnétique. — L'action d'un champ magnétique sur un élément de courant étant identique à celle du même champ sur l'élément correspondant du contour d'un feuillet limité au courant, il en résulte que l'action du courant sur un pôle est identique à celle d'un feuillet de puissance I dont la face positive serait à gauche du courant.

Le potentiel magnétique d'un courant en un point P est donc, à une constante près, égal au produit de l'intensité I par l'angle ω sous lequel on voit de ce point le côté positif d'une surface limitée au circuit, c'est-à-dire la face située à gauche d'un observateur qui suivrait le courant et regarderait l'intérieur. L'angle ω représente aussi le flux de force qu'une masse égale à l'unité placée au point P émettrait vers cette surface.

Comme les composantes de la force sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles du potentiel, on voit que l'angle solide correspondant à une surface $d\omega$ vue de l'origine des coordonnées, est donné en fonction du contour par les équations

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial x} &= \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial y} &= \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}, \\ \frac{\partial\omega}{\partial z} &= \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}. \end{aligned}$$

468. Action de deux éléments de courant. — L'action de deux éléments de courant peut être établie, d'après Ampère, par la même méthode, à l'aide de quelques principes et de faits empruntés à l'expérience.

I. *Égalité de l'action et de la réaction.* — Ce principe ne comporte pas de vérification expérimentale quand il s'agit de deux éléments de courants. On doit le considérer comme l'hypothèse fondamentale; il entraîne comme conséquence que l'action de deux éléments est dirigée suivant la droite qui les joint. D'autre part, l'action réciproque de deux éléments de courant

est évidemment proportionnelle à la longueur de chaque élément, à l'intensité du courant dans chacun d'eux et à une fonction, qui reste à connaître, de la distance des éléments ainsi que de leurs directions relatives.

II. *L'action change de sens quand on change le sens d'un seul des courants; elle reste la même quand on change simultanément le sens des deux courants.* C'est là une propriété générale des courants électriques.

III. *Principe de symétrie.* — Il résulte du principe de symétrie que l'action mutuelle de deux éléments *a* et *b* (fig. 108), dont l'un *a* est situé dans le plan perpendiculaire à l'autre en son milieu, est nulle.

Considérons, en effet, le système *a'b'* symétrique du premier par rapport à un plan P parallèle à l'élément *a* et à la droite OC qui joint les milieux des éléments.

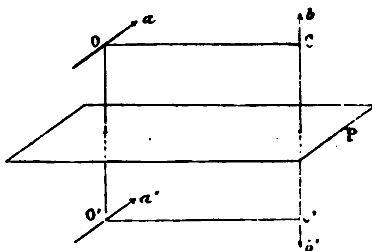


Fig. 108

Les actions de *a* sur *b* et de *a'* sur *b'* sont respectivement dirigées suivant OC et O'C' et dans le même sens par raison de symétrie. Or, le second système n'est autre que le premier où l'on aurait changé le sens du courant dans l'élément *b*; la force aurait dû changer de sens par l'effet de cette inversion, elle est donc nulle.

La force est nulle, en particulier, si l'élément *a* est perpendiculaire à la droite OC qui joint le milieu des deux éléments, ou dirigé suivant cette droite. Ce sont les deux cas dont on aura à faire usage.

IV. *Principe des courants sinueux.* — Le principe des courants sinueux peut être appliqué, comme plus haut (**463**) et avec les mêmes réserves; nous pourrons toujours remplacer

un élément de courant par ses projections sur trois axes rectangulaires.

Considérons deux éléments a et b (fig. 109) dans une position quelconque; soient ds et ds' leurs longueurs, i et i' les intensités des deux courants rapportées à une unité quelconque, θ et θ' les angles de leurs directions avec la droite OO′ qui joint leurs milieux, r la distance OO′, enfin ω l'angle des plans menés par la droite OO′ et les deux éléments.

Prenons pour plan de figure le plan qui passe par l'élément ds et la droite OO′, et remplaçons chacun des éléments par ses projections sur trois axes rectangulaires; l'un de ces axes

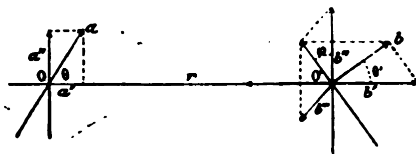


Fig. 109

est la droite OO′; l'autre une droite dans le plan de figure, et le troisième une perpendiculaire à ce plan. L'élément a n'a que deux projections

$$a' = ds \cos\theta,$$
$$a'' = ds \sin\theta;$$

les trois projections de l'élément b sont

$$b' = ds' \cos\theta',$$
$$b'' = ds' \sin\theta' \cos\omega,$$
$$b''' = ds' \cos\theta' \sin\omega.$$

L'action totale se compose des actions de chacun des éléments a' et a'' sur chacun des éléments b', b'' et b'''.

De ces six actions, quatre sont nulles d'après le principe de symétrie, celles de a' sur b'' et b''' et celles de a'' sur b' et b''':

Il ne reste donc à examiner que l'action de a' sur b' et celle de a'' et sur b''.

La première s'exerce entre des éléments dirigés suivant une même droite, on pourra la représenter par

$$ii' ds ds' \cos\theta \cos\theta' \mathrm{F}(r).$$

La seconde s'exerce entre des éléments parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, on pourra la représenter par

$$ii' ds ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega f(r),$$

la fonction de la distance étant différente puisque les conditions ne sont pas les mêmes.

L'action $d^2\psi$ sera donc exprimée par la formule

$$(9) \qquad d^2\psi = ii' ds ds' [\cos\theta \cos\theta' \mathrm{F}(r) + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega f(r)].$$

Si on désigne par ε l'angle des deux éléments, on a

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega,$$

et on peut écrire

$$(10) \qquad d^2\psi = ii' ds ds' [\cos\theta \cos\theta' [\mathrm{F}(r) - f(r)] + \cos\varepsilon f(r)].$$

469. Détermination des fonctions $\mathrm{F}(r)$ et $f(r)$. — Pour déterminer les fonctions $\mathrm{F}(r)$ et $f(r)$, il est nécessaire de recourir à l'expérience, et on peut employer des méthodes très différentes suivant le phénomène auquel on s'adresse. Nous adopterons la marche d'Ampère, qui n'est peut-être pas la plus rigoureuse au point de vue mathématique, mais qui conduit le plus rapidement à la formule finale.

On s'appuie sur les deux expériences suivantes imaginées par Ampère.

V. *Lorsque trois courants semblables de même intensité ont leurs dimensions homologues en progression géométrique, c'est-à-dire comme* 1, m, et m^2, *et sont en outre homothétiques, les actions des courants extrêmes sur le courant intermédiaire sont égales et de signes contraires.* Si ce dernier est mobile

suivant une ligne passant par le centre de similitude et qu'on le dérange de sa position d'équilibre, il y revient de lui-même, c'est-à-dire que l'équilibre est stable.

Ampère a réalisé l'expérience avec trois courants circulaires situés dans le même plan, le circuit intermédiaire étant mobile autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

VI. *L'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à l'élément.* — La disposition de cette dernière expérience est la même que pour l'action des aimants sur les courants (**463**, IV).

Considérons les trois courants semblables de la première expérience (V). Pour la position d'équilibre, les distances au

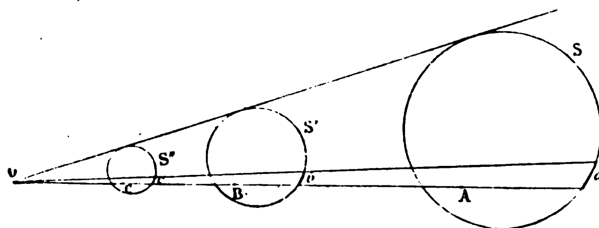


Fig. 110

centre de similitude O de trois points homologues A, B et C (fig. 110) des cercles satisfont à la relation

$$\frac{OA}{1} = \frac{OB}{m} = \frac{OC}{m^2};$$

on en déduit

$$OA - OB = AB = OA(1 - m),$$
$$OB - OC = BC = OA\, m(1 - m),$$

et, par suite,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{m}.$$

Pour trois éléments de courant homologues, a, b et c, les longueurs seront ds, $m\,ds$ et $m^2 ds$; la distance des deux premiers étant r, celle du second au troisième sera mr.

Si l'on admet que chaque élément intermédiaire tel que b est en équilibre entre les deux autres a et c qui lui corres-

pondent, le courant tout entier S′ sera en équilibre entre les deux courants homothétiques S et S″. Il ne semble pas que cette condition soit toujours nécessaire, mais elle est évidemment suffisante, et elle permet de déterminer la forme des deux fonctions $F(r)$ et $f(r)$.

Il en résulte, en effet, que l'action exercée sur l'élément *b* ne doit pas changer quand en remplace *a* par *c*, c'est-à-dire ds par $m^2 ds$ et r par mr; l'équation (9) donnera alors, en supprimant le facteur commun $ii'dsds'$ et remarquant que les angles θ et θ' sont égaux et l'angle ω nul,

$$\cos^2\theta F(r) + \sin^2\theta f(r) = m^2[\cos^2\theta F(mr) + \sin^2\theta f(mr)].$$

Cette condition devant être satisfaite quelles que soient les valeurs particulières de m, de θ et de r, il faut qu'on ait séparément

$$m^2 F(mr) = F(r),$$
$$m^2 f(mr) = f(r).$$

En faisant $r=1$, et $m=r$, il vient

$$r^2 F(r) = C^{te} = h,$$
$$r^2 f(r) = C^{te} = kh,$$

et, par suite,

$$F(r) = \frac{h}{r^2},$$

$$f(r) = k\frac{h}{r^2}.$$

Ainsi les fonctions $F(r)$ et $f(r)$ sont toutes deux en raison inverse du carré de la distance.

L'expression de l'action élémentaire devient alors :

$$(11) \quad d^2\psi = \frac{hii'dsds'}{r^2}\Big[k\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega\Big],$$

ou

$$(12) \quad d^2\psi = \frac{hii'dsds'}{r^2}\Big[(k-1)\cos\theta\cos\theta' + \cos\varepsilon\Big].$$

470. Détermination du rapport des deux constantes. — La dernière expérience (VI) permet de déterminer le rapport de k deux constantes.

Plaçons l'origine des coordonnées au milieu de l'élément mobile ds', et l'axe des x dans la direction de l'élément lui-même. L'action d'un élément ds d'un circuit fermé où l'intensité est ia pour expression, comme on vient de le voir,

$$d^2\psi = \frac{hii'dsds'}{r^2}\left[(k-1)\cos\theta\cos\theta' + \cos\varepsilon\right].$$

Les coordonnées de l'élément ds étant x, y, z et sa distance à l'origine r, on a

$$\cos\theta' = \frac{x}{r},$$
$$\cos\theta = \frac{dr}{ds},$$
$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}.$$

L'action élémentaire peut donc s'écrire sous la forme

$$d^2\psi = \frac{hii'dsds'}{r^2}\left[(k-1)\frac{x}{r}\frac{dr}{ds} + \frac{dx}{ds}\right]$$
$$= hii'ds'\left[(k-1)\frac{x}{r^3}dr + \frac{dx}{r^2}\right],$$

et la projection de cette force sur l'axe des x est

$$d^2\psi\cos\theta' = d^2\psi\frac{x}{r} = hii'ds'\left[(k-1)\frac{x^2dr}{r^4} + \frac{xdx}{r^3}\right].$$

La composante parallèle à l'axe des x de l'action du circuit fermé sur l'élément ds' a donc pour expression

$$d\xi' = \int d^2\psi\frac{x}{r} = hii'ds'\left[(k-1)\int\frac{x^2dr}{r^4} + \int\frac{xdx}{r^3}\right].$$

L'intégration par parties donne

$$\int x^2 r^{-4}\, dr = \left[-\frac{1}{3} r^{-3} x^2\right] + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{r^3}.$$

Pour un circuit fermé, le premier terme du second membre est nul ; il vient donc

$$d\xi' = hii'ds' \left[\frac{2}{3}(k-1)+1\right] \int \frac{x\,dx}{r^3} = \frac{hii'ds'}{3}(2k+1)\int \frac{x\,dx}{r^3}.$$

Comme cette composante doit être nulle d'après l'expérience, il en résulte

$$2k+1=0, \quad \text{ou} \quad k=-\frac{1}{2}.$$

Avec cette valeur de k, l'action élémentaire devient

$$(13) \quad d^2\psi = h\frac{ii'ds'ds}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right],$$

ou

$$d^2\psi = hii'ds'\left[\frac{dx}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x\,dr}{r^3}\right].$$

471. Détermination de la constante h. — Les composantes de l'action du courant parallèles aux autres axes sont alors

$$d\eta' = \int d^2\psi\frac{y}{x} = hii'ds'\left[\int \frac{y\,dx}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{xy\,dr}{r^4}\right],$$
$$d\zeta' = \int d^2\psi\frac{z}{r} = hii'ds'\left[\int \frac{z\,dx}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{xz\,dr}{r^4}\right].$$

L'intégration par parties donne encore

$$\int \frac{xy\,dr}{r^4} = \left(-\frac{1}{3}\frac{xy}{r^3}\right) + \frac{1}{3}\int \frac{x\,dy + y\,dx}{r^3}.$$

Le premier terme du second membre étant nul pour un circuit fermé, on a enfin

$$(14) \quad \begin{cases} d\eta' = \dfrac{hii'ds'}{2}\displaystyle\int \frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}, \\ d\zeta' = \dfrac{hii'ds'}{2}\displaystyle\int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}. \end{cases}$$

L'action F du courant sur une masse magnétique égale à l'unité placée à l'origine et, par conséquent, l'intensité du champ que détermine ce courant au point où est situé l'élément, a pour valeur IG en désignant par I l'intensité électromagnétique du courant (466), et ses composantes sont

$$X = -IA = -I\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3},$$
$$Y = -IB = -I\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3},$$
$$Z = -IC = -I\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3}.$$

Les trois composantes $d\xi'$, $d\eta'$, $d\zeta'$ de l'action $d\varphi'$ du circuit sur l'élément ds' peuvent donc s'écrire

$$d\xi' = 0,$$
$$d\eta' = -\frac{hii'ds'}{2}C,$$
$$d\zeta' = +\frac{hii'ds'}{2}B.$$

On en déduit

$$X\,d\xi' + Y\,d\eta' + Z\,d\zeta' = 0,$$

d'où il résulte que les deux forces F et $d\varphi'$ sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Comme l'axe des x est seul déterminé, nous pouvons choisir les deux autres de manière que l'action magnétique F du courant soit dans le plan des xz ; on aura alors

$$Y = 0, \qquad B = 0,$$
$$X = F\cos\alpha, \qquad A = G\cos\alpha,$$
$$Z = F\sin\alpha, \qquad C = G\sin\alpha,$$

α étant l'angle que fait la force F ou la droite G avec l'axe des x.

Il en résulte

$$d\xi' = 0,$$
$$d\zeta' = 0,$$
$$d\eta' = \frac{hii'ds'}{2}G\sin\alpha = \frac{hii'ds'}{2I}F\sin\alpha = d\varphi'.$$

L'action du circuit fermé sur l'élément est donc perpendiculaire à la force F et à l'élément ds', c'est-à-dire au *plan directeur* d'Ampère, et proportionnelle à la surface du parallélogramme construit sur la force F et l'élément ds'.

Si la force du champ $F = IG$, au point où se trouve l'élément ds', était produite par un système magnétique, l'action serait de même dirigée suivant l'axe des y et aurait pour valeur $I' ds' F \sin\alpha$, en désignant par I' l'intensité électromagnétique du courant qui traverse l'élément.

Les deux actions ont la même direction et elles sont proportionnelles; si nous *admettons* qu'elles sont identiques, il en résultera

$$h = 2\frac{II'}{ii'}.$$

Comme l'expression numérique d'une grandeur est en raison inverse de l'unité avec laquelle on la mesure, on voit que la constante h est égale à deux fois le carré du rapport de l'unité choisie arbitrairement pour mesurer l'intensité du courant à l'unité électromagnétique.

472. — Si l'on suppose que les courants ont été évalués d'abord en unités électromagnétiques, on a alors

$$h = 2;$$

on retrouve ainsi la formule d'Ampère, que nous avons obtenue précédemment (**459**),

$$(15) \qquad d^2\psi = \frac{2II'dsds'}{r^2}\left[\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\theta \cos\theta'\right],$$

$$(16) \qquad d^2\psi = \frac{2II'dsds'}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta \cos\theta'\right],$$

et qu'on peut écrire sous la forme plus symétrique (**351**)

$$d^2\psi = \frac{2II'dsds'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}.$$

473. Unité électrodynamique d'intensité. — Si, avec Ampère, on faisait immédiatement $h=1$ dans la formule (13), l'intensité du courant serait exprimée en fonction d'une unité particulière que l'on appelle *unité électrodynamique*.

Cette unité se trouverait définie par la formule même. En y faisant

$$\theta=\theta'=\frac{\pi}{2},$$
$$\varepsilon=0,$$
$$ds=ds'=1,$$
$$i=i'=1,$$

il vient

$$d^2\psi=1.$$

Dans ce cas les courants sont parallèles entre eux, de longueurs égales à l'unité, perpendiculaires à la ligne qui joint leurs milieux et à une distance égale à l'unité ; l'intensité du courant, égale pour chacun d'eux et prise pour unité, est telle que l'action réciproque soit égale à l'unité de force.

L'équation (14) donnerait alors, en supposant les courants égaux,

$$i^2=2\mathrm{I}^2, \qquad i=\mathrm{I}\sqrt{2}.$$

L'intensité électrodynamique d'un courant est donc égale à son intensité électromagnétique multipliée par $\sqrt{2}$.

En vertu de la relation qui lie l'expression numérique d'une grandeur à l'unité qui lui sert de mesure, on voit que *l'unité électrodynamique de courant est égale à l'unité électromagnétique divisée par* $\sqrt{2}$.

474. — L'identité qui existe entre l'action mutuelle des courants et celle des systèmes magnétiques corrélatifs a été confirmée dans toutes les expériences, autant du moins qu'un régime permanent est établi dans les circuits.

Nous citerons, par exemple, les expériences de Weber sur l'action réciproque de deux bobines cylindriques à bases circulaires. Cette action est proportionnelle au produit des intensités des deux courants; elle varie avec la distance et la direction relative des bobines suivant les mêmes lois que celle

de deux aimants dont les axes magnétiques seraient respectivement parallèles aux axes des bobines.

475. Formules équivalentes à celle d'Ampère. — Nous avons vu (349) que l'action de deux éléments de contour de deux feuillets magnétiques, laquelle est équivalente à l'action élémentaire électrodynamique, peut être exprimée d'une infinité de manières différentes, soumises à cette condition que la résultante des actions d'un circuit fermé sur un élément ait une valeur déterminée.

476. — 1° *Formule de M. Reynard.* — La première forme que nous avons rencontrée (348) pour l'action de ds sur ds' est, en supposant l'élément ds' à l'origine des coordonnées et dirigé suivant l'axe des x, une force dont les composantes sont

$$f_x = 0,$$

$$f_y = -a\frac{x^2}{r^3}d\frac{y}{x} = a\frac{y^2}{r^3}d\frac{x}{y},$$

$$f_z = -a\frac{x^2}{r^3}d\frac{z}{x} = a\frac{z^2}{r^3}d\frac{x}{z}.$$

Le facteur a dans ces équations représente le produit $\text{II}'ds'$, et x, y, z sont les coordonnées de l'élément ds.

La force elle-même est exprimée par la formule

$$f = \frac{\text{II}'ds'ds}{r^2}\sin\theta\cos\mu',$$

dans laquelle θ est l'angle de l'élément ds avec la droite r et μ' l'angle de l'élément ds' avec le plan rds.

En appelant $d\beta$ l'angle sous lequel de l'élément ds' on voit l'élément ds, angle qui est égal à $\frac{ds\sin\theta}{r}$, cette formule peut encore s'écrire

$$f = \frac{\text{II}'ds'}{r}\cos\mu'\,d\beta.$$

C'est la formule de M. Reynard.

Pour déterminer la direction de cette force élémentaire, nous remarquerons d'abord qu'elle est normale à l'élément ds' puisque $f_x = 0$.

Elle est située dans le plan rds. Ce plan a, en effet, pour équation, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$X(ydz - zdy) + Y(zdx - xdz) + Z(xdy - ydx) = 0.$$

Son intersection avec le plan des yz est

$$Y(zdx - xdz) + Z(xdy - ydx) = 0,$$

d'où il résulte

$$\frac{Y}{f_y} = \frac{Z}{f_z}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} r^2 ds^2 \sin^2\theta &= (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2 \\ &= r^6 \frac{(f_y^2 + f_z^2)}{a^2} + (ydz - zdy)^2 = \frac{r^6 f^2}{a^2} + (ydz - zdy)^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f^2 = \frac{a^2 ds^2 \sin^2\theta}{r^4} \left[- \frac{(ydz - zdy)^2}{r^2 ds^2 \sin^2\theta} \right].$$

Or, l'expression $\dfrac{ydz - zdy}{rds \sin\theta}$ est le cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x la normale au plan rds : la parenthèse est donc le carré du sinus de cet angle ou le carré du cosinus de l'angle μ' que fait le plan avec l'axe des x, c'est-à-dire avec l'élément ds', et on a

$$f = \frac{a ds \sin\theta \cos\mu'}{r^2} = \frac{II' ds ds'}{r^2} \sin\theta \cos\mu.$$

Ainsi l'action de ds sur ds' est située dans le plan rds, normale à l'élément ds', proportionnelle au sinus de l'angle que

fait l'élément ds avec la distance r et au cosinus de l'angle que fait l'élément ds' avec le plan rds, et enfin en raison inverse du carré de la distance.

Prenons comme plan des xz le plan rds et, dans ce plan, la ligne OO′ qui joint les deux éléments comme axe des x. La force qui agit sur l'élément ds' placé à l'origine des coordonnées est située dans le plan des xz et perpendiculaire à ds'. Pour avoir sa direction, il suffit de projeter l'élément ds' sur le plan des xz; une droite située dans ce plan et normale à la projection sera la direction demandée; elle est perpendiculaire au plan projetant et, par suite, à l'élément ds' qui passe par son pied dans ce plan.

Les composantes de cette force parallèles aux axes sont

$$f_x = f\cos\beta = \frac{\text{II}'ds\sin\theta}{x^2}\,ds'\cos\mu'\cos\beta = \frac{\text{II}'dxdz'}{x^2},$$
$$f_y = 0,$$
$$f_z = f\sin\beta = \frac{\text{II}'ds\sin\theta}{x^2}\,ds'\cos\mu'\sin\beta = \frac{\text{II}'dzdx'}{x^2}.$$

Désignant encore par θ' l'angle de la droite r avec l'élément ds' et par ω l'angle des deux plans rds et rds', on a

$$dz' = ds'\sin\theta'\cos\omega,$$
$$dx' = ds'\cos\omega,$$

ce qui donne

$$f_x = \frac{\text{II}'}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\cos\omega\,ds\,ds',$$
$$f_z = \frac{\text{II}'}{r^2}\sin\theta\cos\theta'\,ds\,ds'.$$

L'action de deux éléments de courants consécutifs est évidemment nulle.

En résumé, nous n'avons plus ici une action et une réaction égales et opposées, mais sur chacun des deux éléments une action différente, dirigée normalement à cet élément et dans le plan déterminé par l'autre élément.

L'existence d'une force normale à l'élément est incompa-

tible avec l'idée d'une action à distance; mais si l'on envisage, au contraire, les forces électrodynamiques comme le résultat d'une modification dans les propriétés élastiques du milieu, on conçoit aisément que la réaction de ce milieu sur un élément de courant puisse être normale.

477. — 2° *Formule générale.* — On peut ajouter à chacune des composantes f_x, f_y, et f_z une différentielle exacte des coordonnées, sans que l'action du circuit fermé sur l'élément ds' soit modifiée. On peut donc prendre comme composantes de l'action élémentaire les expressions générales suivantes, dans lesquelles X, Y et Z désignent des fonctions quelconques de coordonnées :

$$d^2\xi' = a\,dX,$$
$$d^2\eta' = a\left[dY - \frac{x^2}{r^3}\,d\frac{y}{x}\right],$$
$$d^2\zeta' = a\left[dZ - \frac{x^2}{r^3}\,d\frac{z}{x}\right].$$

478. — 3° *Formule d'Ampère.* — Si l'on impose à la force élémentaire la condition d'être dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments, on obtient la formule d'Ampère; cette formule est la seule qui satisfasse au principe général de l'égalité de l'action et de la réaction et, par conséquent, aux conditions essentielles d'une force véritablement élémentaire. Pour toute autre solution, l'action de l'élément ds sur l'élément ds' ne sera pas égale et directement opposée à celle de l'élément ds' sur l'élément ds.

479. — 4° *Formule de Grassmann.* — Remplaçons les fonctions arbitraires X, Y et Z respectivement par xf, yf et zf, en désignant par f une fonction de la distance r. Les composantes de la force élémentaire seront alors

$$d^2\xi' = a\,d(xf),$$
$$d^2\eta' = a\left[d(xf) - \frac{x^2}{r^3}\,d\frac{y}{x}\right],$$
$$d^2\zeta' = a\left[d(zf) - \frac{x^2}{r^3}\,d\frac{z}{x}\right].$$

Cette opération revient à ajouter à la force donnée par la

formule de M. Reynard une autre force $d^2\psi_1$ dont les composantes sont

$$d^2\xi_1 = a\,d(xf) = a[fdx + xdf],$$
$$d^2\eta_1 = a\,d(xf) = a[fdy + ydf],$$
$$d^2\xi_1 = a\,d(zf) = a[fdz + zdf].$$

La force elle-même est donnée par l'équation

$$[d^2\psi_1]^2 = a^2[f^2ds^2 + r^2(df)^2 + 2frdfdr],$$

ou, en tenant compte de la relation $dr = ds\cos\theta$,

$$\frac{1}{a^2}(d^2\psi_1)^2 = [fdr + rdf]^2 + f^2ds^2\sin^2\theta = [d(rf)]^2 + f^2ds^2\sin^2\theta.$$

Cette force fait avec la droite r un angle dont le cosinus est

$$a\frac{xd(xf) + yd(yf) + rd(zf)}{rd^2\psi_1} + a\frac{frdr + r^2df}{rd^2\psi_1} = a\frac{d(rf)}{d^2\psi_1}.$$

Enfin l'angle δ qu'elle fait avec l'élément ds est

$$\cos\delta = \frac{a}{dsd^2\psi_1}[dxd(xf) + dy\,d(yf) + dzd(zf)],$$

ou

$$\cos\delta = \frac{adr}{dsd^2\psi_1}d(rf) - \frac{afds}{d^2\psi_2}\sin\theta.$$

Si l'on impose à cette force la condition d'être perpendiculaire à la droite qui joint les deux éléments, on a alors

$$d(rf) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$rf = A, \qquad f = \frac{A}{r};$$

par suite la force ajoutée a pour valeur

$$d^2\psi_1 = afds\sin\theta = \frac{Aa}{r}ds\sin\theta.$$

On verrait d'ailleurs que cette force $d^2\psi_1$ fait avec l'élément ds un angle égal à $\theta+\frac{\pi}{2}$.

Lorsque les deux éléments sont dirigés suivant la même droite, comme la force $d^2\psi_1$ est nulle et que la force donnée par la formule de M. Reynard est aussi nulle, l'action des deux éléments est nulle.

Dans cette hypothèse, qui est celle de Grassmann, la force réelle $d^2\psi$ serait la résultante d'une force en raison inverse du carré de la distance, définie par la formule de M. Reynard, et d'une force $d^2\psi_1$ en raison inverse de la simple distance, normale à la droite qui joint les éléments et dont la direction fait avec l'élément ds un angle égal à $\frac{\pi}{2}+\theta$.

On pourrait encore imaginer plusieurs autres conditions également compatibles avec l'expérience; mais ces quelques exemples suffiront pour montrer l'indétermination du problème, et en indiquer les principales solutions.

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

480. Action de deux courants parallèles. — D'après la formule d'Ampère, deux éléments de courants parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux s'attirent ou se repoussent suivant que les courants sont de même sens ou de sens contraires.

On vérifie habituellement ce résultat en approchant un courant rectiligne, que l'on peut considérer comme indéfini, d'une portion de courant rectiligne mobile parallèlement à elle-même. En réalité l'expérience est plus complexe, car chacun des courants considérés fait partie d'un circuit fermé. De quelque manière qu'on suppose placés l'un par rapport à l'autre les plans des deux courants, un rapprochement des deux parties rectilignes augmentera pour chacun d'eux le flux de force qu'il recevra de l'autre par sa surface négative et diminuera l'énergie relative, si les courants sont de même sens; l'inverse a lieu quand les courants sont de sens contraires.

Soient I l'intensité du courant indéfini, I' celle du courant fini qui lui est parallèle et b sa longueur. Si on fait varier de da la distance a des deux courants supposés de même sens, la variation du flux de force qui entre dans le circuit du courant mobile est

$$dQ = -bda\frac{2I}{a} = -2Ib\frac{da}{a};$$

la force qui s'exerce sur la partie mobile du circuit a pour expression $-I'\frac{dQ}{da} = 2II'\frac{b}{a}$, elle est donc en raison inverse de la distance a.

481. Courants angulaires. — Deux courants rectilignes placés dans le voisinage l'un de l'autre tendent à se mettre parallèlement entre eux. On énonce habituellement ce résultat en disant que deux courants qui font un angle s'attirent, si tous deux s'approchent ou s'éloignent en même temps du sommet de l'angle ou de la perpendiculaire commune, et qu'ils se repoussent dans le cas contraire.

L'expérience se fait en approchant un courant rectiligne indéfini de la partie inférieure d'un cadre rectangulaire mobile traversé par un courant. Le cadre mobile tourne de manière à recevoir sur sa face négative le maximum du flux de force émané du courant rectiligne. Le travail relatif à un déplacement quelconque n'a pas d'expression simple; mais le travail total qui correspond au déplacement du cadre depuis la position où son plan est perpendiculaire au courant rectiligne jusqu'à celle où il lui devient parallèle, est proportionnel au flux de force qui traverse le cadre dans le second cas. En appelant a_0 et a_1 les distances au courant indéfini des deux côtés du cadre qui lui sont parallèles et b la longueur d'un de ces côtés, on a

$$Q = -2\mathrm{I}b\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a} = -2\mathrm{I}bl.\frac{a_1}{a_0},$$

et le travail électromagnétique est égal à $2\mathrm{II}'bl.\frac{a_1}{a_0}$.

On rendrait facilement compte de ces mouvements en remplaçant les courants par les feuillets magnétiques équivalents, et considérant les actions réciproques de ces feuillets.

On peut encore arriver au même but à la manière de Faraday, par la considération des lignes de force et de leur distribution dans le champ. Les lignes de forces figuratives du champ résultant des divers systèmes en présence sont plus serrées dans certaines régions que dans d'autres. En se représentant ces lignes de force (105) comme des fils élastiques soumis à une tension dans le sens de leur longueur et une répulsion dans le sens perpendiculaire, on aura une idée très nette du mouvement relatif qui tend à se produire.

482. Répulsion apparente de deux éléments de courant consécutifs. — Cette expérience importante d'Ampère consiste à mettre les deux pôles d'une pile en communication avec deux auges rectangulaires séparées par une cloison isolante et remplies de mercure. Un fil de fer est contourné de manière à former deux branches horizontales parallèles reposant sur le mercure des auges et une partie transversale en forme de pont qui relie les deux premières. Au moment où l'on ferme le circuit de la pile, on voit le fil glisser à la surface du mercure et s'éloigner des points par lesquels arrive le courant.

Ampère pensait vérifier ainsi que deux éléments de courant dirigés suivant la même droite et dans le même sens se repoussent, comme l'indique la formule élémentaire; mais il

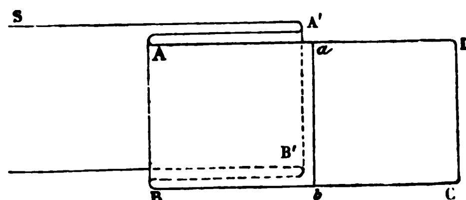


Fig. 111.

est facile de voir que l'interprétation des phénomènes ne comporte point cette conséquence.

Dans cette expérience, le courant parcourt en effet un circuit dont une des portions est mobile, et dont la surface tend à devenir maximum (155). On peut du reste retrouver ce résultat directement en remplaçant le courant par un feuillet flexible replié sur lui-même, comme l'indique la figure 111. Les trois feuillets superposés dans l'espace ABB'A' ne donnent lieu entre eux à aucune force parallèle au plan du courant, mais leur action extérieure est équivalente à celle d'un feuillet simple. La portion aDCb tend à s'éloigner et le feuillet se développe pour occuper la plus grande surface.

483. Rotations électromagnétiques. — 1° *Roue de Barlow.* — Une roue métallique dentée, mobile autour d'un axe horizontal, est disposée de manière qu'une ou plusieurs dents plongent à la partie inférieure dans une auge renfermant du mer-

cure. Si l'on fait traverser ce système par un courant qui entre par l'axe et sorte par le mercure, la seule action du courant sur lui-même tendra à faire marcher les dents inférieures dans le sens qui les éloigne du reste du circuit, de manière à en augmenter la surface totale ; mais cette action est généralement trop faible pour vaincre les frottements. On obtient un effet plus énergique en disposant l'auge entre les branches d'un aimant en fer à cheval placé horizontalement. Les lignes de force du champ magnétique traversent alors le plan de la roue ; si on les suppose dirigées d'avant en arrière, c'est-à-dire le pôle nord en avant, la rotation se fera en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.

Pour avoir un phénomène facile à calculer, remplaçons l'aimant par un champ magnétique uniforme d'intensité F, parallèle à l'axe de rotation. Appelons a le rayon de la roue, θ l'angle de deux dents consécutives, et supposons la surface du mercure tellement placée que l'une des dents touche le liquide au moment même où la précédente le quitte. Le flux de force Q qui traverse le triangle formé par les rayons qui correspondent à ces deux dents est égal à $F\dfrac{a^2 \sin\theta}{2}$, ou sensiblement $F\dfrac{a^2\theta}{2}$, c'est-à-dire au produit de la force par la surface du secteur, et le travail qui correspond est $IF\dfrac{a^2\theta}{2}$. Pour un tour entier, le travail est égal à IFS, c'est-à-dire proportionnel à la surface totale S de la roue.

484. 2° *Expérience d'Ampère.* — Cette expérience, dans laquelle on produit la rotation d'un aimant par un courant, est la réciproque de celle de Faraday dont la théorie a été donnée plus haut (**456**). L'appareil est disposé de telle sorte que l'un seulement des pôles de l'aimant puisse traverser le courant ; on obtient alors une rotation continue. L'aimant (fig. 112), lesté par un contre-poids de platine, flotte sur le mercure et peut tourner sur lui-même autour de son axe ; le courant est amené à la surface du liquide, traverse la partie émergeante de l'aimant et en sort par un conducteur fixe qui plonge à la partie supérieure N dans une goutte de

mercure. Si on suppose que le courant suive rigoureusement l'axe de l'aimant, le travail à chaque tour pour une masse magnétique m située en dehors de l'axe est $4\pi m\mathrm{I}$ et donne lieu à un couple dont le moment est $2m\mathrm{I}$. En réalité, le phénomène est plus complexe parce que le courant traverse la section entière de l'aimant.

Faraday a répété l'expérience en plaçant l'aimant en dehors du circuit. Le courant est amené au centre du vase par une tige

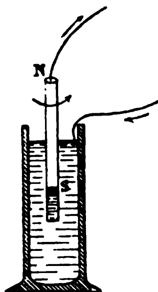


Fig. 112.

métallique et l'aimant flotte dans une position excentrique.

Dans les deux cas, si le courant monte par l'axe et que l'extrémité supérieure de l'aimant soit un pôle nord, la rotation se fait en sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre. La disposition de Faraday donne un frottement beaucoup plus grand et la rotation est moins rapide.

485. Rotation des liquides. — Lorsque le courant traverse un liquide, les filets liquides qui coïncident avec les lignes de flux électrique peuvent être considérées comme des circuits mobiles, capables d'obéir aux actions électromagnétiques, et l'expérience montre que le liquide est entraîné avec le courant qu'il transporte.

1° *Expérience de Davy.* — Deux électrodes de platine viennent affleurer dans le mercure un peu au-dessous de sa surface. En plaçant au-dessus de l'une d'elles, l'électrode négative par exemple, le pôle N d'un aimant, on constate une dépression du mercure et en même temps une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre.

2° *Expérience de M. Jamin.* — Les deux électrodes d'un voltamètre sont placées dans la même verticale et sur l'axe des pôles d'un aimant en fer à cheval. Si les molécules liquides situées sur un filet de courant formaient un fil rigide, on se trouverait dans l'un des cas de l'expérience de Faraday (**456**) où la rotation n'est pas possible. En réalité les forces électromagnétiques agissent d'une façon indépendante, et de la même manière que dans l'expérience de Davy, sur les portions des filets qui partent en divergeant de chacune des électrodes. Le liquide se divise alors en deux couches superposées qui tournent en sens contraires, et la rotation est rendue visible par l'entraînement des bulles gazeuses qui proviennent de la décomposition de l'eau.

3° *Expériences de M. Bertin.* — Dans les expériences de M. Bertin, le mouvement du liquide est rendu visible par de petits morceaux de liège qui flottent à la surface. Le liquide est placé dans une couronne annulaire qui renferme deux cercles métalliques, l'un intérieur et l'autre extérieur. En prenant ces cercles comme électrodes, on obtient dans le liquide une série de courants radiants, centripètes ou centrifuges. Quand on place un aimant dans l'axe de la couronne, le liquide prend une rotation dans un sens déterminé conforme à la théorie. Le sens de la rotation ne change pas si on remplace l'aimant central par un tube aimanté situé autour de la couronne. En effet, si le pôle nord est à la partie supérieure dans les deux cas, le flux de force magnétique est dirigé de haut en bas, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'aimant creux. Il n'en est plus de même quand on remplace l'aimant par une bobine : la rotation du liquide change de sens suivant que la bobine est intérieure ou extérieure à la couronne annulaire. En effet, le flux de force n'a pas le même sens à l'intérieur et à l'extérieur de la bobine, et chacune des lignes de force constitue un circuit fermé.

486. Rotations électrodynamiques. — Considérons un courant rectiligne indéfini X'X d'intensité I (fig. 113) et un courant rectiligne fini AB de longueur a et d'intensité I', perpendiculaire au premier et situé dans le même plan. Si l'on donne au courant a un déplacement dx parallèle au courant I, le

travail correspondant sera, en appelant r_0 la distance BC,

$$2\text{II}'dx \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{dr}{r} = 2\text{II}'dx l.\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

La force qui agit sur le courant mobile est perpendiculaire à sa direction, parallèle au courant indéfini et a pour valeur $2\text{II}'l.\left(1+\frac{a}{r_0}\right)$. Ce courant sera entraîné parallèlement à lui-même par une force constante et remontera ou descendra le courant indéfini suivant qu'il sera descendant ou ascendant par rapport à ce dernier.

On réalise ordinairement cette expérience en faisant agir un courant circulaire sur une portion de courant mobile autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Le courant mobile prend alors un mouvement de rotation.

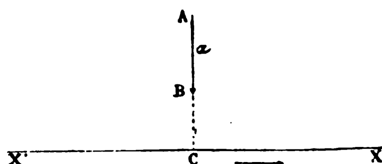


Fig. 113.

Si le courant mobile est fermé ou a ses extrémités sur l'axe, il n'y a évidemment aucun mouvement, car alors chaque ligne de force rencontre deux fois le contour.

187. Action d'un champ uniforme. — Considérons d'abord deux conducteurs rectilignes indéfinis AA', BB' (fig. 114) parallèles à la distance b, et supposons que les deux extrémités A et B étant en communication avec les pôles d'une pile, le circuit soit fermé par une barre transversale CC', mobile parallèlement à elle-même le long des conducteurs AA' et BB'.

Soit Z la composante de l'intensité du champ normale au plan des conducteurs; pour un déplacement dx de la barre mobile, la variation du flux de force magnétique dans le

circuit est $bZdx$. S'il s'agit du champ terrestre et que les rails soient horizontaux, la composante Z est dirigée de haut en bas dans notre hémisphère et, avec le sens du courant indiqué par les flèches, le pont mobile CC′ s'éloignera de AB sous l'influence des forces électromagnétiques; il s'en rapprocherait pour un courant de sens contraire.

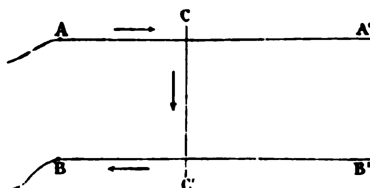


Fig. 114.

Dans l'expérience d'Ampère (182) l'action du courant sur lui-même tend à augmenter la surface et à éloigner le pont mobile. Cette action et celle de la Terre s'ajouteront ou se retrancheront suivant le sens du courant; le mouvement du fil est, en effet, plus ou moins facile suivant le cas.

188. — Supposons maintenant que le conducteur mobile forme un circuit fermé; soit S la surface de ce circuit, s'il est plan, ou la projection maximum de sa surface sur un plan que nous appellerons le plan du courant. Lorsqu'un pareil circuit est mobile dans un champ magnétique uniforme, comme celui de la terre, l'équilibre stable correspond au cas où le flux de force qui traverse la face négative du circuit est maximum; le plan du circuit tend donc à se mettre perpendiculaire à la force. Sous l'influence de la terre, ce plan serait perpendiculaire à l'aiguille d'inclinaison, le courant marchant de l'est à l'ouest dans la partie inférieure. Si F est l'intensité du champ, I celle du courant, l'énergie potentielle du courant dans la position d'équilibre est

$$W_1 = -ISF;$$

quand on retourne le courant face pour face, elle devient

$$W_2 = ISF.$$

Le travail dépensé contre les forces électromagnétiques dans cette opération est donc

$$W_2 - W_1 = 2ISF.$$

Si le courant est assujetti à tourner autour d'un axe vertical, on a seulement à considérer la composante horizontale H du champ. Le travail relatif à une rotation de 180° autour de l'axe à partir de la position d'équilibre est alors

$$W' = 2ISH.$$

Si le courant tourne autour d'un axe horizontal parallèle au méridien magnétique, la composante verticale Z du champ intervient seule. Pour une rotation de 180° à partir de la position équilibre, le travail est encore

$$W'' = 2ISZ.$$

Le rapport des travaux dans les deux derniers cas,

$$\frac{W''}{W'} = \frac{Z}{H},$$

est égal à la tangente de l'inclinaison. La mesure de ces travaux permettrait donc de déterminer les éléments du magnétisme terrestre sans avoir recours à des aimants.

Si l'axe de rotation est dans le méridien magnétique, le travail total est nul lorsque le courant, situé d'abord dans ce plan, y revient après une rotation de 180° : les travaux qui correspondent aux deux moitiés de la rotation sont alors égaux et de signes contraires.

Enfin, le travail serait nul pour une rotation quelconque si l'axe de rotation était parallèle à la direction du champ.

489. Circuits astatiques. — Le travail relatif à un déplacement quelconque est encore nul lorsque le circuit comprend deux courbes fermées telles que leurs projections sur un plan quelconque donnent deux surfaces égales S et S' entourées par des courants marchant en sens contraires. C'est à cette condition que doivent satisfaire les courants mobiles,

dits *astatiques*, construits de manière à n'être pas soumis à l'action de la terre. Les figures 115, 116, 117 fournissent des exemples de conducteurs qui réalisent ces conditions.

Si les deux surfaces S et S′ n'étaient pas égales, l'action du champ serait proportionnelle à leur différence S — S′.

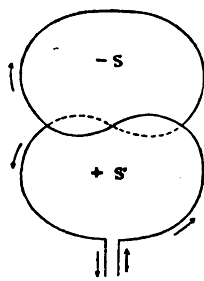


Fig. 115.

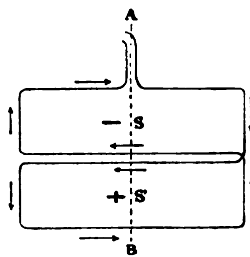


Fig. 116.

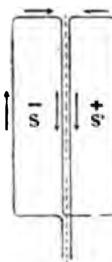


Fig. 117.

190. Rotation d'un courant sous l'action de la terre. — Une portion de courant non fermée et mobile autour d'un axe prend, en général, un mouvement continu de rotation sous l'influence du magnétisme terrestre.

Remarquons, d'abord, que dans un champ magnétique uniforme comme le champ terrestre, on peut toujours remplacer un courant par ses projections sur trois plans rectangulaires; cela revient, en effet, à remplacer l'intensité du champ par ses trois composantes rectangulaires.

Considérons un courant quelconque mobile autour d'un axe et déterminons ses projections sur trois plans, l'un perpendiculaire à l'axe de rotation, les deux autres passant par cet axe et tels que l'un d'eux soit parallèle à la direction du champ; soient S, S′ et S″ ces trois projections. La projection S″ perpendiculaire au champ ne donnera lieu à aucune action. Sur la projection S′ l'action sera purement directrice : le circuit du courant sera entraîné de manière que la surface S″ soit maximum et présente à la force sa face négative; dans notre hémisphère le courant doit être descendant dans la partie tournée vers l'Est. Reste à considérer la projection S sur le plan perpendiculaire à l'axe. Si elle est fermée et de forme fixe, elle ne subit aucune action; si elle a une partie mobile, la compo-

sante du champ parallèle à l'axe aura un moment constant par rapport à cet axe et produira une rotation continue.

191. — Soit, par exemple, le système formé par un courant OP de longueur a (fig. 118) mobile autour d'un axe vertical, dont l'une des extrémités O est sur l'axe de rotation et dont l'autre P plonge dans une rigole pleine de mercure. Le courant arrive au mercure en A, parcourt en sens opposés les deux

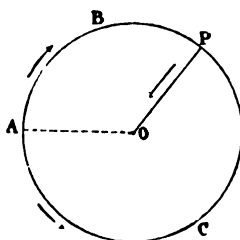


Fig. 118.

parties ABP et ACP, et regagne l'axe par la partie mobile PO. Soit I l'intensité totale du courant, x l'intensité dans l'arc B, y dans l'arc C; le courant sera évidemment égal à I dans la portion mobile PO.

La surface comprise par la projection horizontale S se compose de deux parties, l'une ABPO présentant à la composante Z de l'action terrestre sa face négative, l'autre ACPO sa face positive. La première tend donc à augmenter, la seconde à diminuer, et pour un déplacement angulaire θ du rayon PO, le travail total est

$$\frac{1}{2}a^2(x+y)Z\theta = \frac{1}{2}a^2 IZ\theta.$$

Ce travail est indépendant de la position du conducteur OP; la force est donc constante. Le travail correspondant à un tour entier sera

$$\frac{1}{2}a^2 2\pi IZ = SIZ.$$

Si le courant donne une projection verticale S', le mouvement

de rotation sera modifié par l'action directrice correspondant à cette projection. Il est facile de voir que, suivant le rapport des deux surfaces S et S′, la vitesse initiale et la valeur des frottements, le moment de l'action directrice pourra l'emporter sur le moment de rotation et maintenir l'appareil en équilibre dans une position perpendiculaire au méridien magnétique. Dans les appareils utilisés pour cette expérience, on prend un courant mobile symétrique par rapport à l'axe de rotation. La projection S′ est alors nulle, et le couple de rotation, qui donnerait au système un mouvement uniformément accéléré s'il n'y avait pas de frottement, finit par lui imprimer un mouvement uniforme.

492. Action de deux circuits rectangulaires. — On peut encore calculer l'action de deux cadres rectangulaires AC et A′C′,

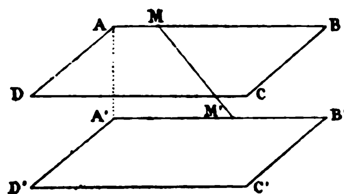


Fig. 119.

dont les côtés sont parallèles. Supposons, pour simplifier, les cadres égaux (fig. 119) et leurs sommets correspondants A et A sur une perpendiculaire à leur plan. L'énergie réciproque des deux circuits avec des courants égaux à l'unité a pour expression, d'après la formule de Neumann (352),

$$W = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds ds'.$$

La valeur de $\cos\varepsilon$ est égale à l'unité pour deux côtés parallèles, et nulle pour deux côtés perpendiculaires tels que AB et B′C′. L'énergie devient alors

$$W = \int\int \frac{ds ds'}{r} = \int ds \int \frac{ds'}{r}.$$

Cette expression ne contient que des termes relatifs aux fils parallèles. Considérons d'abord les deux côtés AB et A'B', de longueur a et à la distance h. Soient ds et ds' deux éléments situés respectivement en M et M' et r leur distance ; enfin, supposons que l'on compte les longueurs s et s' à partir des points A et A'. Par suite de la relation

$$r^2 = h^2 + (s' - s)^2,$$

on obtient pour la première intégration, dans laquelle la distance s est considérée comme constante,

$$\int \frac{ds'}{r} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(s'-s)^2 + h^2}} = l.\left[s' - s + \sqrt{(s'-s)^2 + h^2}\right]_0^a,$$

ou

$$\int \frac{ds'}{r} = l.\frac{a - s + \sqrt{(a-s)^2 + h^2}}{-s + \sqrt{s^2 + h^2}}.$$

La seconde intégration relative à ds s'effectue facilement, car on a, en général,

$$\int l.\left(-u + \sqrt{u^2 + h^2}\right) du = u l.\left(-u + \sqrt{u^2 + h^2}\right) + \sqrt{u^2 + h^2};$$

il vient alors

$$\int_0^a l.\frac{a - s + \sqrt{(a-s)^2 + h^2}}{-s + \sqrt{s^2 + h^2}} ds = 2\left[a l.\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h} - \sqrt{a^2 + h^2} + h\right].$$

En changeant le signe de cette expression et remplaçant h par la distance h' des côtés AB et C'D', on obtiendra de même le terme relatif à ce dernier côté. Si le rectangle est un carré, on a $h' = \sqrt{a^2 + h^2}$, et les deux termes de l'énergie correspondant au côté AB donnent

$$\left[a l.\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{a + \sqrt{2a^2 + h^2}} \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} + \sqrt{2a^2 + h^2} - 2\sqrt{a^2 + h^2} + h\right].$$

L'énergie totale est alors

$$W = 8\left[a l.\,\frac{a-\sqrt{a^2-h^2}}{a-\sqrt{2a^2-h^2}}\,\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}-\sqrt{2a^2-h^2}-2\sqrt{a^2-h^2}+h\right].$$

Quand on fait varier de dh la distance des cadres, la variation d'énergie dW est égale au travail $-F\,dh$ de la force F, considérée comme attractive, qui s'exerce entre les deux circuits et l'on a

$$F = -\frac{dW}{dh}.$$

On obtient ainsi, toutes réductions faites,

$$F = 8\left[\frac{a^2}{h\sqrt{a^2-h^2}}-\frac{a^2h}{(a^2-h^2)\sqrt{2a^2-h^2}}-\frac{2h}{\sqrt{a^2-h^2}}-\frac{h}{\sqrt{2a^2-h^2}}-1\right].$$

Si les intensités des courants dans les deux cadres sont respectivement I et I′, l'action réciproque a pour expression, en désignant par P la somme des termes compris dans la parenthèse,

$$F = 8II'P.$$

193. Propriétés des courants circulaires. — Le potentiel d'un courant circulaire est égal, à une constante près, à celui d'un feuillet de même puissance et de même contour. Nous avons donné plus haut (366) l'expression de ce potentiel pour un point quelconque. Si le point est situé sur l'axe à une distance x du centre, il suffit dans l'équation (16) de faire $z = 0$: il vient, en remplaçant Φ par I,

$$V = 2\pi I\left(1-\frac{x}{u}\right) = 2\pi I\left(1-\frac{x}{\sqrt{u^2+x^2}}\right).$$

On en déduit

$$F = 2\pi I\,\frac{a^2}{u^3} = 2\,\frac{IS}{u^3},$$

en désignant par S la surface du cercle. Pour un point de l'axe, la force est donc en raison inverse du cube de la distance au contour.

Cette force est maximum au centre du cercle : on a alors

$$F_m = 2\frac{IS}{a^3} = 2\pi\frac{I}{a} = \frac{IL}{a^2},$$

L étant la longueur de la circonférence.

Ce dernier résultat se déduirait immédiatement de la considération du feuillet équivalent. Soit $2h$ l'épaisseur du feuillet supposé plan, on a, en désignant par I_a l'intensité d'aimantation,

$$I = \Phi = 2hI_a.$$

L'action des deux couches terminales sur un point situé au centre a pour valeur (**322**)

$$F = 4\pi I_a\left(1 - \frac{h}{a}\right),$$

et l'induction magnétique est

$$F_1 = F_m = -F + 4\pi I_a = 4\pi I_a\frac{h}{a} = 2\pi\frac{I}{a}.$$

On peut maintenant rejeter le feuillet en dehors du point considéré, sans changer la valeur de la force (**151**).

194. Solénoïde électromagnétique. — Ampère a donné le nom de *solénoïde* à un système de courants circulaires égaux, infiniment petits et infiniment rapprochés, équidistants et normaux à une courbe quelconque, passant par leur centre, qu'on appelle *directrice*.

Soit dS la surface commune des courants élémentaires, h leur distance et I l'intensité du courant. Chaque courant élémentaire peut être remplacé par un feuillet magnétique de même grandeur, d'épaisseur h et de densité superficielle σ telles que l'on ait

$$\Phi = h\sigma = I.$$

Les surfaces en contact de tous ces feuillets ayant des charges égales et de signes contraires s'annulent réciproquement, sauf les deux extrêmes, et le système est identique à un filet solénoïdal. L'action extérieure se réduit donc à celle de deux masses magnétiques $\pm M$ placées aux extrémités. Si on désigne par l la longueur du solénoïde, par n le nombre total des courants élémentaires et par n_1 le nombre de ces courants contenus dans l'unité de longueur, on a

$$M = \sigma dS = \frac{IdS}{h} = \frac{nIdS}{l} = n_1 IdS.$$

495. Bobine cylindrique. — Supposons qu'un cylindre soit recouvert de courants normaux à l'axe et équidistants. Le système de ces courants constitue une espèce de solénoïde de forme cylindrique et de dimensions transversales finies; on le réalise approximativement en enroulant un fil en hélice sur la surface du cylindre. Chacun des éléments de spire peut être remplacé par ses projections sur l'axe et sur un plan perpendiculaire à l'axe. Si la section du cylindre est petite, on détruit sensiblement l'effet des premières en faisant revenir le fil en sens contraire parallèlement à l'axe.

Quel que soit d'ailleurs le diamètre du cylindre, si les spires sont suffisamment rapprochées et que la bobine se compose d'un nombre pair de couches dans lesquelles l'inclinaison des spires soit alternativement de sens contraires, l'effet des projections sur l'axe est encore sensiblement nul, et l'action extérieure diffère très peu de celle des projections normales.

L'ensemble des courants normaux à l'axe équivaut à un aimant solénoïdal de même forme; on peut, en effet, remplacer chacun d'eux par un feuillet, et décomposer le système en une infinité de solénoïdes parallèles dont chacun équivaut à un filet solénoïdal.

L'action du système sur les points extérieurs au cylindre se réduit donc (**372**) à celle de deux couches égales et de signes contraires répandues uniformément sur les bases, et dont la densité σ a pour valeur $n_1 I$.

Pour les points intérieurs, la force est égale à l'induction

du système magnétique équivalent. Si le cylindre est assez long pour que dans une partie de son étendue l'action des bases soit négligeable, les lignes de force sont parallèles à l'axe du cylindre; le champ est uniforme et a pour intensité

$$F_1 = 4\pi I_a = 4\pi n_1 I.$$

Le flux d'induction qui traverse la section du cylindre est

$$Q = F_1 S = 4\pi n_1 IS;$$

ce flux est de sens contraire au flux de force intérieur qui provient des bases de l'aimant équivalent.

Il est évident d'ailleurs qu'une bobine n'est pas équivalente à un aimant creux : dans l'aimant creux toutes les lignes de force tant intérieures qu'extérieures partent de la surface positive pour s'absorber a la surface négative; dans les bobines, au contraire, les lignes de force intérieures sont la continuation des lignes de force extérieures, et constituent des courbes fermées sur elles-mêmes qui n'aboutissent jamais à des masses magnétiques.

496. Bobine annulaire. — Supposons qu'un anneau de révolution soit recouvert de courants égaux, équidistants et situés chacun dans un plan passant par l'axe; le système peut encore être décomposé en une série de solénoïdes et il est équivalent à un aimant solénoïdal de même forme (**411**).

Tous les solénoïdes élémentaires comprennent alors un même nombre de courants ayant la même intensité I, mais de longueurs différentes. En désignant par n_1 le nombre des courants compris entre deux plans méridiens qui font entre eux un angle égal à l'unité, et par x le rayon d'un solénoïde élémentaire, la distance des spires successives sera $\frac{x}{n_1}$; l'intensité d'aimantation du filet magnétique équivalent est alors $\frac{n_1 I}{x}$ et l'induction ou la force magnétique $\frac{4\pi n_1 I}{x}$. Le flux d'induction qui traverse une surface S, prise dans la section méridienne de l'anneau, a pour valeur $4\pi n_1 I \int \frac{dS}{x}$.

Dans le cas où l'anneau est un tore circulaire (**372**), on a

$$\int \frac{dS}{x} = \pi(R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

Le flux total qui traverse la section est alors

$$Q = 4\pi^2 n I_1 (R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

497. Cas d'une surface quelconque. — Considérons maintenant le cas général où une surface quelconque Σ serait recouverte de courants plans de même intensité, parallèles entre eux et à une distance telle qu'il y en ait n_1 par unité de longueur. On peut encore remplacer l'ensemble des courants par une série de solénoïdes parallèles aboutissant à la surface, et ces solénoïdes eux-mêmes par les filets magnétiques équivalents ; on constituera ainsi un aimant uniforme, dont l'intensité d'aimantation est $n_1 I$, et dont la densité en chaque point de la surface a pour valeur $n_1 I \cos\theta$, en appelant θ l'angle de la normale à la surface au point considéré avec une perpendiculaire au plan des courants.

L'action intérieure de ces courants est égale à l'induction du système magnétique équivalent. Dans le cas de la sphère (**355**), elle est constante et égale à $\frac{8}{3}\pi n_1 I$; le flux d'induction qui traverse le grand cercle perpendiculaire à la ligne des pôles, ou à l'axe commun des courants, a pour valeur

$$Q = \frac{8}{3}\pi^2 R^2 n_1 I = \frac{2}{3} L^2 n_1 I,$$

en désignant par L la circonférence du grand cercle.

Le champ intérieur serait également constant dans le cas de l'ellipsoïde (**356**).

Il résulte de là une manière nouvelle d'envisager le magnétisme terrestre : l'action magnétique de la terre est équivalente à celle d'une série de courants circulaires situés dans des plans

équidistants perpendiculaires à l'axe magnétique, ces courants circulant de l'est à l'ouest.

498. Théorie du magnétisme d'Ampère. — On voit qu'il est possible, au moyen de courants situés dans des plans parallèles, de réaliser un système équivalent à un aimant uniforme qui aurait la même surface extérieure : les deux systèmes sont équivalents pour tous les points extérieurs, et produisent à l'intérieur la même induction.

On peut, de même, remplacer un aimant quelconque par un système de courants superficiels, en tant du moins qu'on envisage seulement son action extérieure.

Cette action, en effet (**315**), équivaut à celle d'une couche de masse totale nulle distribuée sur la surface. Si on appelle σ la densité de la couche en un point, F_n et F'_n les composantes normales, comptées à partir de la surface, des actions qu'elle exerce à l'extérieur et à l'intérieur, on a (**38**)

$$4\pi\sigma = F_n + F'_n.$$

Considérons le potentiel intérieur V' de la couche et les surfaces de niveau Σ auxquelles la force F' est normale, et supposons que sur chacune de ces surfaces on place des couches magnétiques égales et de signes contraires dont la densité σ' en chaque point soit déterminée par la condition

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} F' = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV'}{dn'}.$$

L'action extérieure de cet ensemble de surfaces est nulle. Remarquons maintenant que le produit $\sigma' dn' = -\frac{1}{4\pi} dV'$ est constant entre deux surfaces de niveau. Si donc on associe la couche négative de la surface Σ, où le potentiel est V', avec la couche positive de la surface suivante Σ' au potentiel $V' + dV'$, on constitue un feuillet dont la puissance magnétique $\sigma' dn'$ est constante. Un courant de même intensité qui suivrait sur la surface la courbe déterminée par l'intersection du feuillet aurait donc la même action à l'extérieur; on ferait de même

pour tous les autres feuillets. Mais, en constituant ce feuillet, on a laissé une couronne négative correspondant à la différence $\Sigma - \Sigma'$ des deux surfaces, et la somme des actions extérieures de ces couronnes est égale et de signe contraire à celle des courants superficiels. Si on appelle $d\Sigma$ et dS deux éléments correspondants de cette couronne et de la surface de l'aimant déterminés par un tube de force, on a

$$F'_n dS = F' d\Sigma = 4\pi\sigma' d\Sigma,$$

ce qui donne

$$\sigma' d\Sigma = \frac{F'_n}{4\pi} dS.$$

La quantité de magnétisme renfermée dans l'élément $d\Sigma$ est donc la même que celle que contiendrait l'élément dS avec une densité égale à $-\frac{F'_n}{4\pi}$.

Il en résulte que l'action extérieure de tous les courants superficiels, définis par les feuillets qui précèdent, équivaut à celle d'une couche de masse totale nulle dont la densité en chaque point serait $+\frac{F'_n}{4\pi}$.

En prolongeant dans l'intérieur de l'aimant, par des surfaces continues, les surfaces de niveau qui correspondent au potentiel extérieur V, on verrait, de même, que l'on peut remplacer par un système de courants superficiels une couche dont la densité en chaque point serait $\frac{F_n}{4\pi}$.

L'ensemble des deux systèmes de courants est un nouveau système de courants superficiels, ayant la même action extérieure qu'une couche dont la densité serait $\frac{1}{4\pi}(F_n + F'_n)$, c'est-à-dire la densité σ de la couche magnétique qui équivaut à l'aimant proposé.

On peut donc remplacer l'action extérieure d'un aimant quelconque par celle d'un système de courants superficiels ; mais l'équivalence n'existerait plus pour les points intérieurs.

Il est possible, au contraire, d'obtenir une représentation exacte de tous les effets magnétiques, tant intérieurs qu'extérieurs, en remplaçant les filets magnétiques, dans lesquels un aimant quelconque peut être décomposé (**313**), par les solénoïdes électromagnétiques correspondants.

Ampère admet que ces solénoïdes élémentaires sont formés par des courants réels qui circulent à l'intérieur des molécules; ces courants ne passent jamais d'une molécule à une autre, et ils préexistent à l'aimantation (**125**) qui a seulement pour effet de les orienter.

Dans cette hypothèse, un aimant n'est plus une substance continue, mais un ensemble de molécules distinctes, donnant lieu à une distribution très complexe de la force magnétique et du potentiel. Mais il en résulte une simplification notable, car la force et l'induction magnétique sont alors définis de la même manière, et la force satisfait à l'équation de Laplace, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des aimants.

L'hypothèse d'Ampère soulève cependant une difficulté capitale, car on ne conçoit pas que des courants puissent exister d'une manière permanente sans dégagement de chaleur et, par suite, sans une dépense continue d'énergie. Mais, si on localise les courants dans les molécules elles-mêmes, dont la constitution est inconnue, il n'est pas impossible d'admettre que la résistance soit nulle et que les courants persistent sous une forme qui n'est pas abordable par l'expérience. Cette conception n'implique donc par elle-même aucune contradiction.

499. Aimantation par les courants. — L'aimantation par les courants a été découverte par Arago en 1820. Arago avait constaté qu'un fil de cuivre parcouru par un courant attire la limaille de fer; chaque parcelle de limaille devenant un petit aimant se place perpendiculairement au fil, le pôle nord à gauche du courant, comme dans l'expérience d'Œrsted. Ampère fit remarquer qu'on peut augmenter beaucoup l'action du courant sur un barreau de fer doux ou d'acier en enroulant le fil en hélice autour du barreau; on obtient ainsi, avec le fer doux en particulier, des aimants temporaires auxquels on a donné le nom d'*électro-aimants*.

Les électro-aimants peuvent acquérir une puissance beaucoup plus grande que celle des meilleurs barreaux d'acier; mais leur caractère principal est de pouvoir, lorsque le fer qui les constitue est très doux, gagner ou perdre presque instantanément leurs propriétés magnétiques. Enfin ils présentent cette propriété curieuse qu'en modifiant d'une manière convenable l'enroulement du fil sur le noyau de fer doux, on peut y distribuer le magnétisme à volonté et obtenir dans la longueur du barreau un nombre quelconque de pôles ou de *points conséquents*.

Le calcul des effets des électro-aimants est en général très difficile, lors même que les courants qui entourent le morceau de fer doux sont équidistants et parallèles entre eux. Dans ce cas, le système de courants développe un champ intérieur dont l'intensité est définie par l'induction d'un aimant uniforme terminé à la même surface; le noyau de fer doux placé dans ce champ prend en chaque point une aimantation qui dépend de l'intensité du champ et aussi du magnétisme développé par l'induction sur le corps lui-même. L'aimantation ne peut donc être uniforme que dans les cas particuliers que nous avons examinés (**385**). Quant à l'action extérieure, elle est la résultante de celle du système de courants, ou de l'aimant uniforme équivalent, et de celle du noyau de fer doux.

500. Exemples. — Pour une sphère entourée de courants parallèles et équidistants, l'intensité du champ φ produit par les courants (**497**) a pour valeur $\frac{8}{3}\pi n_1 I$.

L'intensité d'aimantation est alors (**385**)

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\mu-1}{\mu+2}\varphi = 2\frac{\mu-1}{\mu+2}n_1 I,$$

et l'induction

$$F_1 = \frac{3\mu}{\mu+2}\varphi = \frac{8\pi\mu}{\mu+2}n_1 I.$$

Si la sphère est placée dans une bobine cylindrique assez

longue pour que l'effet des extrémités puisse être considéré comme négligeable, elle prendra aussi une aimantation uniforme.

Il en serait de même pour un ellipsoïde et aussi très approximativement pour un cylindre dont l'axe coïnciderait avec celui de la bobine.

501. — Dans le cas d'une bobine cylindrique de grande longueur (**495**) l'intensité du champ intérieur est $4\pi n_1 I$; l'intensité d'aimantation d'un long cylindre parallèle au champ aurait pour valeur $k\varphi$ (**292**) ou $4\pi k n_1 I$, et l'induction intérieure F_1 serait $4\pi k\varphi$, ou $16\pi^2 k n_1 I$.

Si S est la section du barreau, le flux d'induction magnétique qui le traverse est

$$F_1 S = 16\pi^2 k n_1 IS,$$

et le flux total, en y comprenant l'induction $4\pi n_1 IS$ du courant, a pour valeur

$$Q = 4\pi n_1 (1 + 4\pi k) IS.$$

Cette quantité est accessible à l'expérience et on pourra en déduire le coefficient d'aimantation k.

502. — La détermination de ce coefficient est encore plus exacte avec un morceau de fer doux, ayant la forme d'un tore qu'on entoure de courants équidistants (**496**). Dans ce cas, l'intensité du champ produit par les courants est en chaque point $\frac{4\pi n_1 I}{x}$. Cette force étant la seule efficace, l'intensité d'aimantation au point considéré a pour valeur

$$k\varphi = \frac{4\pi n_1 I}{x}.$$

L'induction est égale à $4\pi k\varphi$, de sorte que le flux total d'induction à travers la section S du fer doux, en comprenant encore celui qui provient des courants, est

$$Q = 4\pi n_1 I (1 + 4\pi k) \int \frac{dS}{x}.$$

Si le fer doux ne remplit pas la totalité de l'espace limité par les courants, mais seulement une partie S' de la section S, le flux total d'induction qui traverse la surface des courants est

$$Q' = 4\pi n_1 I\left[\int\frac{dS}{x} + 4\pi k\int\frac{dS'}{x}\right].$$

Supposons, par exemple, que la section du fer soit un cercle de rayon a' concentrique à la section circulaire d'un tore; le flux total d'induction dans le tore sera

$$Q' = 4\pi^2 n_1 I\left[R - \sqrt{R^2 - a^2} + 4\pi k\left(R - \sqrt{R^2 - a'^2}\right)\right].$$

Si la section de la bobine était un rectangle de hauteur b parallèlement à l'axe de révolution et d'épaisseur $2a$, le rayon moyen étant R, on aurait

$$\int\frac{dS}{x} = b\int_{R-a}^{R+a}\frac{dx}{x} = bl.\frac{R+a}{R-a}.$$

L'anneau de fer pourrait, de même, avoir une section rectangulaire de hauteur b', d'épaisseur $2a'$ et de rayon moyen R'; le flux total d'induction serait alors

$$Q = 4\pi n_1 I\left[bl.\frac{R+a}{R-a} + 4\pi k b' l.\frac{R'+a'}{R'-a'}\right].$$

Nous verrons plus loin (559) l'usage que l'on peut faire de ces différentes formules.

503. — Mesure des courants. — Galvanomètres. — On évalue habituellement l'intensité des courants par les actions électromagnétiques ou électrodynamiques qu'ils exercent, et on appelle l'instrument qui sert à cette mesure *galvanomètre* ou *électrodynamomètre,* suivant qu'il repose sur l'une ou sur l'autre des deux actions.

Un galvanomètre se compose d'une aiguille aimantée, ou d'un système magnétique quelconque, sur lequel on fait agir

un conducteur traversé par le courant; on évalue l'effet produit à l'aide d'une force antagoniste, telle que la torsion d'un fil métallique ou d'une suspension bifilaire, ou par l'action d'un champ magnétique extérieur.

Considérons seulement le cas d'une aiguille horizontale suspendue à un fil sans torsion appréciable, et placée au centre d'un cadre sur lequel on a enroulé un fil conducteur qui forme une série de spires parallèles.

Si les spires sont parallèles au méridien magnétique, et qu'on les fasse traverser par un courant, elles produiront un champ magnétique dont l'intensité au milieu sera proportionnelle à l'intensité du courant et pourra être représentée par gI. La composante horizontale du champ terrestre en ce point étant H, la composante horizontale du champ est $\sqrt{g^2I^2 + H^2}$ et sa direction fait avec le méridien magnétique un angle δ dont la tangente est égale à $\frac{gI}{H}$.

Une aiguille aimantée infiniment petite placée en ce point, et qui était d'abord en équilibre dans le plan du cadre, sera donc déviée de l'angle δ, et on pourra en déduire l'intensité du courant par l'expression

$$I = \frac{H}{g} \tang \delta.$$

La formule n'est rigoureuse que si le champ magnétique du courant est uniforme dans tout l'espace qu'occupe l'aiguille. Lorsque l'aiguille a une longueur notable par rapport aux dimensions du cadre, l'intensité du champ n'est généralement pas constante, et la déviation est donnée par une formule moins simple. On pourra alors, par une graduation empirique, déterminer la relation qui existe entre l'intensité du courant et la déviation produite.

Le moment magnétique de l'aiguille n'a aucune influence sur la position d'équilibre; il n'a d'autre effet que de modifier l'intensité des forces et, par suite, la durée des oscillations de l'aiguille

Si l'on veut augmenter la sensibilité du galvanomètre, c'est-à-dire la déviation δ pour un courant donné, il faut augmenter la valeur de g et diminuer, s'il est possible, celle de H. On augmente la valeur de g en multipliant les spires du cadre, suivant la méthode de Schweigger, et en les plaçant aussi près que possible de l'aiguille. Pour diminuer H, on peut placer à une certaine distance un aimant qui produise au centre du cadre un champ magnétique parallèle et de sens contraire à celui de la terre.

Souvent aussi on a recours à un système de deux aiguilles quasi-astatique (**299**), dont l'une est située au centre du cadre et l'autre à l'extérieur ; l'action de la terre sur le système mobile est beaucoup plus faible, sans que l'action du courant, qui s'exerce surtout sur l'aiguille intérieure, soit sensiblement modifiée. On peut encore employer deux cadres, chacun d'eux ayant une des aiguilles en son centre, et y faire passer le courant en sens contraires, de manière que les actions exercées sur les deux aiguilles soient concordantes.

504. Boussole des tangentes. — Si l'on veut déterminer l'intensité d'un courant en valeur absolue, il faut, outre la composante H du champ terrestre, connaître aussi la constante g du galvanomètre. On donne en particulier le nom de *boussole des tangentes* à un galvanomètre dont le fil a été enroulé de manière que ce coefficient puisse être calculé d'après les dimensions du fil et la forme du cadre.

Si le cadre porte un fil de longueur L enroulé sur un cercle de rayon a de manière à faire n tours, et que l'aiguille supposée infiniment petite soit placée en un point de l'axe à une distance u de la circonférence, on aura (**493**)

$$g = n\frac{2\pi a^2}{u^3} = \frac{La}{u^3} = \frac{4\pi^2 n^2}{L}\left(\frac{a}{u}\right)^3,$$

ce qui donne

$$I = \frac{Hu^3}{La}\operatorname{tang}\delta = \frac{HL}{4\pi^2 n^2}\left(\frac{u}{a}\right)^3\operatorname{tang}\delta.$$

La distance u devient égale à a lorsque l'aiguille est située au centre du cercle.

Si l'on veut tenir compte de la longueur de l'aiguille, il faut évaluer, par les formules du n° **388**, l'intensité du champ en dehors de l'axe des courants.

La formule de la boussole des tangentes serait rigoureuse et indépendante de la longueur de l'aiguille, si le champ du courant était uniforme. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, avec une bobine cylindrique (**495**) ou une bobine sphérique (**497**) à courants équidistants. En appelant n_1 le nombre des spires par unité de longueur, on a $g = 4\pi n_1$ dans le premier cas, et dans le second $g = \frac{8}{3}\pi n_1$.

505. Électrodynamomètres. — Dans un électrodynamomètre on évalue directement l'action exercée entre deux circuits, l'un fixe et l'autre mobile, traversés par le même courant ou par deux courants différents. Supposons, par exemple, que l'aimant d'une boussole des tangentes soit remplacé par une petite bobine, où un courant pourra être amené par une suspension bifilaire, et qui est en équilibre quand l'axe de la bobine est dans le méridien magnétique. Si l'on fait passer un courant I dans le cadre de la boussole et un courant i dans la bobine, celle-ci est déviée et par une torsion convenable α de la suspension on la ramène dans sa position primitive.

Le moment magnétique de la bobine mobile est proportionnel à i et peut être représenté par li; le couple produit par l'action du cadre est alors $gli\mathrm{I}$. Comme le couple de torsion du bifilaire est proportionnel au sinus de l'angle, on aura, en désignant par T le moment du couple qui correspond à un angle de torsion égale à $\frac{\pi}{2}$,

$$gli\mathrm{I} = \mathrm{T}\sin\alpha.$$

Si les deux fils sont parcourus par le même courant I, cette expression devient

$$\mathrm{I}^2 = \frac{\mathrm{T}\sin\alpha}{gl}.$$

On pourra donc évaluer la valeur absolue de l'intensité du

courant si l'on connaît les constantes T, l et g, ou bien laisser ces constantes indéterminées et se servir de l'appareil comme d'un instrument de comparaison. Tel est le principe des expériences de Weber.

Si l'on suppose que le courant parcourt deux cadres rectangulaires parallèles (192), comme dans les expériences de Cazin, l'intensité pourra se déduire de l'action, attractive ou répulsive, qui s'exerce entre les deux circuits.

506. Mesure des décharges. — Lorsque la durée du courant est assez courte pour que l'aiguille n'ait pas eu le temps de subir un déplacement appréciable avant la cessation du courant, elle a reçu cependant une impulsion et acquis une certaine vitesse ; elle est projetée hors de sa position d'équilibre et y revient ensuite par une série d'oscillations. C'est le cas, par exemple, de la décharge d'un condensateur par un fil conducteur qui renferme un galvanomètre ; la quantité totale d'électricité qui s'écoule peut se déduire de l'angle d'impulsion imprimé à l'aiguille.

L'intensité d'un courant permanent dans le galvanomètre considéré serait donnée par une expression de la forme

$$I=\frac{H}{g}f(\delta),$$

dans laquelle $f(\delta)$ se réduit à l'angle δ quand les déviations sont très petites. Si l'on appelle μ le moment magnétique de l'aiguille, l'action du courant sur l'aiguille produit un couple dont le moment est $\mu g I$.

On sait, d'autre part, que lorsqu'un corps est mobile autour d'un axe, le produit du moment d'inertie K par l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est égal au moment du couple résultant par rapport à l'axe de rotation. On a donc pour l'aiguille considérée, puisque la déviation pendant la décharge est assez petite pour que l'action de la terre soit négligeable,

$$K\frac{d\omega}{dt}=\mu g I.$$

Si l'on appelle dm la quantité d'électricité qui s'écoule pendant le temps dt, cette équation devient

$$K\frac{d\omega}{dt}=\mu g\frac{dm}{dt}.$$

On en déduit, en appelant ω_0 la vitesse angulaire initiale et m la décharge totale,

$$K\omega_0=\mu g m.$$

L'aiguille, une fois lancée avec cette vitesse ω_0 possède une force vive égale à $\frac{K\omega_0^2}{2}$ et elle s'arrête sous un angle θ, lorsqu'elle a effectué contre l'action du champ terrestre un travail ayant la même valeur. On a donc

$$\frac{K\omega^2}{2}=H\mu(1-\cos\theta)=2H\mu\sin^2\frac{\theta}{2},$$

ou

$$\mu g^2m^2=4HK\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$m=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{HK}{\mu}}2\sin\frac{\theta}{2}.$$

Si les déviations θ sont assez petites, on peut prendre simplement

$$m=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{HK}{\mu}}\theta=\frac{H}{g}\theta\sqrt{\frac{K}{H\mu}}.$$

On voit que l'angle d'impulsion θ est proportionnel à la quantité d'électricité qui s'écoule pendant la décharge, et cette loi de proportionnalité suffira pour toutes les expériences de comparaison.

Si l'on veut déterminer m en valeur absolue, il faut connaître la constante g du galvanomètre et les quantités qui entrent sous le radical.

Remarquons que si l'aiguille est abandonnée à elle-même sous l'influence du magnétisme terrestre, la durée τ des oscillations infiniment petites est

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{H\mu}}.$$

Il en résulte

$$m = \frac{H}{g}\frac{\tau}{\pi}\theta.$$

En réalité, l'angle réel d'impulsion θ est diminué par la résistance du milieu et par les courants d'induction que le mouvement de l'aiguille produit dans le fil; mais, si les oscillations ne diminuent pas très rapidement, on tiendra compte de cet effet en ajoutant à l'angle θ le quart de l'excès de cette déviation sur la déviation θ' produite du même côté par l'oscillation suivante. On aura finalement

$$m = \frac{H}{g}\frac{\tau}{\pi}\left[\theta + \frac{1}{4}(\theta - \theta')\right].$$

CHAPITRE QUATRIÈME

INDUCTION

507. Découverte de Faraday. — Les actions électromagnétiques étudiées dans les chapitres précédents sont purement *mécaniques;* elles s'exercent sur les conducteurs traversés par des courants et correspondent à un état permanent des courants et des aimants en présence. Dans tous les cas où les systèmes éprouvaient des déplacements relatifs, nous avons admis d'une manière implicite que ces déplacements étaient sans influence sur l'état électrique des conducteurs. Faraday a découvert en 1831 une classe de phénomènes d'une nature toute différente, qui correspondent à l'état variable des systèmes; ces phénomènes, qu'il a compris sous le nom d'*induction*, sont de nature *électrique* et se manifestent par la production dans les conducteurs de courants temporaires.

On appelle *courants induits* les courants qui en résultent et *circuit induit* le circuit qui est soumis à l'*induction;* enfin, on donne le nom d'*inducteur* au système dont la variation a été la cause du courant induit.

508. — Les phénomènes découverts par Faraday peuvent être classés en plusieurs catégories :

1° Un circuit fermé devient le siège d'un courant temporaire toutes les fois qu'on déplace un aimant dans le voisinage, ou qu'on en fait varier l'aimantation, ou, d'une manière plus générale, qu'on modifie le champ magnétique dans lequel est placé le circuit. C'est l'*induction magnéto-électrique.*

2° On obtient des effets analogues en substituant un système de courants au système magnétique. Le circuit considéré est parcouru par un courant induit toutes les fois qu'on fait varier

la distance, l'intensité ou la forme d'un courant extérieur. L'effet est le même que celui que produirait la modification correspondante du système magnétique équivalent au courant. C'est l'*induction électrodynamique ou volta-électrique*.

3° Le changement de forme ou de position relative d'un circuit fermé, par rapport au champ magnétique d'un système d'aimants ou de courants, suffit aussi ordinairement pour donner naissance dans ce circuit à un courant induit qui rentre dans une des catégories qui précèdent.

4° Enfin, le fait seul de modifier par un procédé quelconque l'intensité du courant dans un circuit, même quand il est soustrait à toute action extérieure, provoque dans ce circuit un courant d'induction qui se superpose au courant principal et tend toujours à contrarier la variation d'intensité qu'il subit; on lui donne le nom d'*extra-courant*.

509. — L'expérience fournit sur ces courants d'induction les faits généraux suivants :

1° Quel que soit le mode de variation qui donne lieu à un courant induit, deux variations égales en sens contraires donnent toujours des courants égaux et de sens contraires;

2° La durée du courant induit est égale à celle de la variation du système inducteur;

3° La quantité d'électricité mise en mouvement dans le courant induit par une opération quelconque est indépendante de la durée de la variation et, par suite, de celle du courant induit lui-même;

4° Enfin, la nature du conducteur dans lequel se propagent les courants d'induction n'intervient que par la résistance qu'il apporte dans ce circuit.

510. — En examinant les diverses circonstances dans lesquelles se produisent les courants d'induction, il est facile de reconnaître qu'elles ont pour caractère commun de correspondre à une variation du flux de force magnétique qui traverse le circuit induit. Cela est évident pour tous les phénomènes de déplacement relatif des courants ou des aimants; l'expérience montre, d'ailleurs, que tout déplacement ou toute déformation du circuit induit qui ne modifie pas la valeur du flux qui le traverse ne produit jamais de courants induits.

Il en est encore de même pour l'extra-courant. En effet, un courant donne lieu à un champ magnétique et, par suite, à un flux de force dans la surface du circuit qu'il parcourt. On conçoit que tout changement d'intensité ou de forme modifiant ce flux puisse provoquer un effet analogue à celui que produirait le déplacement d'un aimant extérieur donnant lieu à la même variation.

On est donc conduit à caractériser les phénomènes d'induction de la manière suivante :

Quand on modifie d'une manière quelconque le flux de force magnétique qui traverse un circuit fermé, ce circuit devient le siège d'un courant temporaire dont la durée est égale à celle de la variation du flux.

Cet énoncé définit les conditions dans lesquelles se produisent les courants induits. Il reste à établir les lois qui en déterminent le sens et la grandeur.

511. Loi de Lenz. — Peu de temps après la découverte de Faraday, Lenz a énoncé la loi suivante, qui établit un lien entre l'induction produite par le déplacement du système inducteur et le travail électromagnétique tel que le définit la formule d'Ampère :

Tout déplacement relatif d'un circuit fermé et d'un courant ou d'un aimant développe un courant induit dirigé de façon qu'il tende à s'opposer au mouvement.

512. Théorème de Neumann. — La loi de Lenz, d'une grande utilité pratique, donne seulement le sens du courant induit, sans en faire connaître l'intensité. En admettant, comme un fait expérimental, que *l'induction qui se produit pendant un temps très court est proportionnelle à la vitesse avec laquelle se meut le conducteur*, Neumann a pu donner une théorie complète des courants d'induction qui se produisent dans un conducteur linéaire mobile en présence d'un système magnétique quelconque. Il a démontré ainsi ce théorème, que nous retrouverons plus loin sous une forme plus générale :

La force électromotrice d'induction est égale au travail qui serait accompli dans l'unité de temps par le système magnétique, si l'intensité du courant dans le circuit induit était égale à l'unité.

513. Théorie d'Helmholtz et de Thomson. — L'existence des phénomènes d'induction peut être considérée comme une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie, combiné avec la loi électromagnétique d'Ampère et la loi de Joule. Cette proposition a été mise pour la première fois en lumière en 1847 par M. Helmholtz dans son célèbre mémoire sur la *Conservation de la force*. Sir W. Thomson est arrivé de son côté et d'une manière indépendante aux mêmes conclusions.

Considérons un système magnétique invariable dans le voisinage d'un conducteur fixe S, en communication avec une pile. Si l'aimant est immobile, l'intensité I_0 du courant permanent est déterminée par la loi d'Ohm et l'on a, en appelant E la force électromotrice de la pile et R la résistance du circuit,

$$(1) \qquad E = I_0 R.$$

En multipliant les deux membres par $I_0 dt$, on obtient

$$(2) \qquad E I_0 dt = I_0^2 R dt.$$

Cette équation exprime que, pendant le temps dt, l'énergie produite par les actions chimiques est égale à l'énergie calorifique dépensée dans le circuit en vertu de la loi de Joule.

Supposons maintenant qu'au lieu de rester immobile, le système magnétique se déplace en obéissant aux actions électromagnétiques. Le travail extérieur résultant de ce déplacement ne peut être emprunté qu'à la seule source d'énergie qui existe dans le système, c'est-à-dire aux actions chimiques, et l'équation précédente doit être en défaut. D'autre part, aucune raison ne permet de supposer que les lois de Faraday et de Joule cessent d'être applicables; autrement dit, les poids des corps combinés dans les différents couples doivent encore être proportionnels à l'intensité du courant, et l'énergie calorifique dégagée dans le circuit égale au produit de la résistance par le carré de l'intensité. L'intensité du courant n'a donc pu conserver sa valeur primitive.

514. — Supposons que l'aimant soit déplacé de telle manière que la nouvelle valeur de l'intensité reste constante. Tant que cette condition est remplie, l'excès du travail chimique sur l'énergie calorifique dépensée dans le circuit, pendant chaque intervalle de temps dt, sert à effectuer le travail extérieur dT correspondant aux forces électromagnétiques. On a donc, en appelant I l'intensité du courant,

$$(3) \qquad \mathrm{EI}dt = \mathrm{I}^2\mathrm{R}dt + d\mathrm{T}.$$

Si on appelle Q le flux de force provenant du système magnétique qui traverse le circuit en entrant par sa face négative, on a

$$d\mathrm{T} = \mathrm{I}d\mathrm{Q}.$$

En remplaçant dT par cette valeur dans l'équation (3), et divisant par Idt, il vient

$$(4) \qquad \mathrm{E} = \mathrm{IR} + \frac{d\mathrm{Q}}{dt}.$$

Pour que l'intensité du courant reste constante, il faut, d'après cette équation, que le déplacement s'effectue de manière que la dérivée $\frac{d\mathrm{Q}}{dt}$ soit elle-même constante.

Les équations (1) et (4) donnent, en posant $\mathrm{I}_0 - \mathrm{I} = i$,

$$(5) \qquad (\mathrm{I}_0 - \mathrm{I})\,\mathrm{R} = i\mathrm{R} = \frac{d\mathrm{Q}}{dt}.$$

On voit que la dérivée $\frac{d\mathrm{Q}}{dt}$ joue le rôle d'une force électromotrice, agissant en sens inverse de E, et capable de produire un courant i de sens contraire au courant principal, de telle sorte que le courant résultant I satisfait encore à la loi de Ohm, écrite sous la forme

$$(6) \qquad \mathrm{E} - \frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \mathrm{IR}.$$

La quantité $\frac{dQ}{dt}$ s'appelle la ***force électromotrice d'induction: elle est égale, à chaque instant, à la dérivée par rapport au temps du flux de force magnétique qui traverse le circuit.***

Si la valeur de dQ est positive, c'est-à-dire si le flux de force augmente, la force électromotrice d'induction diminue l'intensité du courant et le travail des forces électromagnétiques est positif. Au contraire, si la valeur de dQ est négative, l'aimant se déplace en résistant aux forces électromagnétiques, et cette opération introduit une énergie nouvelle dans le système; l'intensité I du courant est alors plus grande qu'à l'état de repos.

515. — A chaque instant, la quantité dm ou idt d'électricité induite dans le fil est donnée par l'équation

$$(7)\qquad iR\,dt = R\,dm = dQ.$$

La quantité totale d'électricité m correspondant à un déplacement fini, pour lequel le flux de force passe de la valeur Q_1 à la valeur Q_2, est donc

$$(8)\qquad m = \frac{Q_2 - Q_1}{R}.$$

516. — L'établissement du courant dans un circuit exige lui-même un travail dont nous n'avons pas tenu compte, et ce travail, sur lequel nous reviendrons plus loin, est une fonction Ψ de l'intensité du courant. Pendant la période variable, l'énergie des actions chimiques doit fournir aussi le travail $d\Psi$ qui correspond à un accroissement dI de l'intensité. Les équations (3) et (5) deviennent alors

$$(9)\qquad \begin{aligned} EI\,dt &= I^2R\,dt + I\,dQ + d\Psi,\\ iR &= \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{I}\frac{d\Psi}{dt}. \end{aligned}$$

On en déduit, par un raisonnement analogue à celui qui a donné l'équation (8),

$$(8)'\qquad mR = Q_2 - Q_1 + \int_1^2 \frac{1}{I}\,d\Psi.$$

Quelle que soit la loi suivant laquelle se déplace le système magnétique, si l'intensité du courant est la même aux deux limites, le dernier terme de l'équation (8)' est nul. C'est ce qui aura lieu, en particulier, si les limites sont choisies avant et après le mouvement, auquel cas les deux valeurs limites du courant sont égales à I_0.

Avec ces restrictions, on peut donc énoncer comme général le théorème exprimé par l'équation (8) :

La quantité totale d'électricité mise en mouvement par le déplacement quelconque d'un système magnétique est égale au quotient de la variation du flux de force qui correspond à ce déplacement par la résistance du circuit.

517. — Les résultats qui précèdent donnent lieu à quel ques remarques importantes.

1° On voit d'abord que la force électromotrice d'induction est de nature à s'opposer au mouvement, puisque l'intensité primitive de courant est diminuée ou augmentée suivant que le système magnétique obéit ou résiste aux actions électromagnétiques : c'est la *loi de Lenz*.

2° Si l'intensité du courant était égale à l'unité, le travail extérieur accompli dT correspondrait à un travail $\frac{dQ}{dt}$ pendant l'unité du temps. La force électromotrice d'induction est égale à ce travail : c'est le *théorème de Neumann*.

3° La force électromotrice d'induction est indépendante de la force électromotrice E de la pile; l'induction est donc la même, quelle que faible que soit l'intensité du courant primitif. On peut en conclure que l'induction doit se produire également quand le conducteur est à l'état neutre, pourvu qu'il forme un circuit fermé. C'est sous cette forme que les courants d'induction ont été découverts par Faraday.

Toutefois, on doit remarquer que, si le courant était réellement nul dans toute l'étendue du conducteur, l'action réciproque de l'aimant et du circuit serait aussi nulle, et les considérations précédentes ne permettraient pas de prévoir la production de courants induits. Mais on peut dire que cette neutralité parfaite n'est qu'un état d'équilibre instable, impossible à réaliser pratiquement, et qu'il suffirait d'une cause

infiniment petite, une variation de température en quelque point du circuit, ou le déplacement d'un corps électrisé extérieur, même très éloigné, pour faire naître un courant si faible qu'il fût dans le conducteur et, par suite, permettre à l'induction de se produire.

518. Loi générale de l'induction. — Les raisonnements qui précèdent s'appliqueraient de la même manière, et presque identiquement dans les mêmes termes, aux autres cas de l'induction.

On le voit d'une manière évidente pour l'induction électrodynamique, c'est-à-dire celle qui serait produite par le déplacement d'un système de courants constants, substitué au système magnétique, puisque nous avons démontré l'équivalence absolue des champs magnétiques produits par les courants et par les aimants.

Dans le cas des courants induits par variation d'intensité d'un aimant ou d'un courant voisin, le résultat peut être considéré comme équivalent à celui qu'on obtiendrait en amenant de l'infini dans la position actuelle, pour le superposer au premier, un aimant ou un courant identique à la variation considérée.

Quant aux extra-courants, produits par les déformations du circuit lui-même ou par les changements d'intensité du courant principal, l'expérience montre qu'ils sont liés également, et de la même manière, aux variations correspondantes du flux de force magnétique.

On peut donc considérer comme une règle générale que toute variation du flux de force dans un circuit, quelle qu'en soit l'origine, correspond à une variation de l'énergie potentielle et donne lieu à la même force électromotrice d'induction que si elle était produite par le déplacement d'un système magnétique extérieur.

Cette conséquence apparaît surtout comme nécessaire, si, abandonnant l'idée des actions à distance, on considère la transmission des forces électriques et magnétiques comme due à une modification des propriétés élastiques du milieu intermédiaire; on comprend alors que la seule cause prochaine des courants induits dans un conducteur puisse être l'état du

milieu où il est plongé, quelle que soit l'origine des forces qui agissent dans ce milieu. On peut donc formuler de la manière suivante la loi générale des phénomènes d'induction :

La force électromotrice totale développée dans un circuit, à un instant donné, est égale à la dérivée, par rapport au temps, du flux de force magnétique qui le traverse.

Ou encore :

La quantité totale d'électricité induite dans un circuit est égale au produit de l'inverse de sa résistance par la variation totale du flux de force qui le traverse.

Le flux de force qui traverse le circuit à un instant donné se compose du flux Q qui provient des corps extérieurs, aimants ou courants, et du flux produit par le courant qui parcourt le circuit lui-même. Soit L la valeur de ce dernier flux quand l'intensité du courant est égale à l'unité; il sera égal à LI pour une intensité I, et l'équation générale de l'induction s'écrira, en désignant par E les forces électromotrices ordinaires qui agissent dans le circuit,

$$(E-RI)dt=d(Q+LI), \tag{10}$$

ou

$$E-\frac{d(Q+LI)}{dt}=RI.$$

519. Coefficients d'induction. — Si le système inducteur est un feuillet magnétique ou un courant, le flux Q est égal au produit d'une constante M par la puissance magnétique du feuillet ou l'intensité du courant. Cette constante est une fonction seulement de la forme et de la position relative des deux circuits; nous savons qu'elle est la même pour les deux contours en présence (**311**), et que sa valeur est déterminée (**352**) par l'intégrale

$$M=-\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'. \tag{11}$$

On appelle ce facteur M le *coefficient d'induction réciproque* ou *d'induction mutuelle* des deux circuits.

La constante L est une intégrale de même forme, mais avec cette différence que les deux éléments ds et ds' appartiennent au même circuit. On l'appelle le *coefficient d'induction propre* ou *de self-induction*.

La valeur du coefficient de self-induction L est la limite vers laquelle tend celle de M quand deux circuits égaux, traversés par des courants de même sens et de même intensité I, s'approchent de la coïncidence. En effet, le flux total qui traverse à ce moment le système des deux circuits est égal à la somme des flux produits par chacun d'eux, c'est-à-dire à 2LI; on peut le considérer aussi comme la somme 2MI de deux flux égaux entre eux, dont chacun émane de l'un des circuits et traverse l'autre par sa face négative.

520. Induction électromagnétique. — La formule générale (10) appliquée au cas où le système inducteur est un feuillet de puissance Φ donne

$$(12)\qquad (E - RI)\,dt = d(M\Phi + LI).$$

Supposons que, la puissance magnétique Φ étant constante, le feuillet soit amené de l'infini dans une position déterminée en présence du circuit induit supposé fixe; on a alors

$$(E - RI)\,dt = \Phi\,dM + L\,dI.$$

Si on multiplie les deux membres de cette équation par I et qu'on l'intègre depuis $t = 0$ jusqu'à l'instant t où le feuillet prend sa position définitive, on obtient

$$(13)\qquad \int_0^t (EI - RI^2)\,dt = \Phi \int_0^t I\frac{dM}{dt}\,dt + \left(L\frac{I^2}{2}\right)_0^t.$$

Le premier membre de cette équation représente l'excès de l'énergie chimique, fournie par la pile pendant le temps t, sur l'énergie qui apparaît sous forme de chaleur dans le circuit pendant le même temps.

Le premier terme du second membre est le travail total des

actions électromagnétiques; ce travail dépend de la loi du mouvement. On peut concevoir, par exemple, que le feuillet ait été approché très lentement, de manière que l'induction soit très faible et que le courant principal diffère toujours très peu de sa valeur initiale I_0; dans ce cas, en désignant par M le flux de force qui correspond à la position finale du feuillet, le travail électromagnétique serait égal à $\Phi M I_0$.

Le dernier terme représente la variation de l'*énergie potentielle* du courant; il est nul si les deux valeurs limites du courant sont les mêmes, c'est-à-dire si le feuillet magnétique est à l'état de repos dans sa position finale.

521. — Si le feuillet magnétique, étant immobile, avait une puissance variable, on aurait des équations tout à fait analogues

$$(E - RI)\,dt = M\,d\Phi + L\,dI,$$

$$\int_0^t (EI - RI^2)\,dt = M\int_0^t I\frac{d\Phi}{dt}\,dt + \left(L\frac{I^2}{2}\right),$$

qui conduiraient aux mêmes conséquences.

522. — Le cas le plus général est celui où les trois fonctions M, Φ et L varient en même temps, c'est-à-dire que le feuillet magnétique change de puissance, de forme et de position relative, et que le circuit du courant lui-même est déformé. L'équation (12) donne alors pour la force électromotrice d'induction

$$(14)\quad e = \frac{d(M\Phi + LI)}{dt} = M\frac{d\Phi}{dt} + \Phi\frac{dM}{dt} + L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}.$$

Si le circuit induit ne contient pas de force électromotrice indépendante de l'induction, il suffira de faire $E = 0$ dans les équations précédentes.

523. Induction électrodynamique. — Si le système inducteur était un courant constant, on pourrait le remplacer par le feuillet équivalent et rentrer ainsi dans le cas qui précède; mais il faut remarquer que, par suite des réactions, le circuit inducteur lui-même sera soumis à l'induction et que l'intensité du courant ne restera pas constante. Si nous représentons

par R' et L' la résistance et le coefficient de self-induction du circuit inducteur, et par E' la force électromotrice qu'il renferme, l'intensité du courant dans les deux circuits sera déterminée à chaque instant par les deux équations simultanées

$$(15)\quad \begin{aligned}(E - RI)dt &= d(MI' + LI),\\ (E' - R'I')dt &= d(MI + L'I').\end{aligned}$$

La solution complète de ces équations présente en général de grandes difficultés, et nous examinerons dans le chapitre suivant les cas les plus simples où elle peut être obtenue; mais les équations différentielles permettent déjà d'établir quelques remarques importantes.

Si l'on ajoute ces équations après avoir multiplié la première par I et la seconde par I', on obtient

$$(16)\quad (EI + E'I' - RI^2 - R'I'^2)dt = I\,d(MI' + LI) + I'\,d(MI + L'I').$$

Le premier membre représente l'excès de l'énergie fournie par les sources dans les deux circuits sur l'énergie calorifique dépensée dans les conducteurs.

Le second membre peut s'écrire de la manière suivante

$$(17)\quad \frac{1}{2}d(LI^2 + 2MII' + L'I'^2) + \frac{1}{2}I^2dL + II'dM + \frac{1}{2}I'^2dL';$$

il représente la variation totale de l'énergie potentielle des deux circuits et le travail extérieur.

521. Énergie intrinsèque du courant. — Si les circuits sont fixes de forme et de position, les facteurs L, M et L' sont des constantes; la portion de l'énergie non convertie en chaleur a alors pour expression

$$d\left[\frac{LI^2}{2} + MII' + \frac{L'I'^2}{2}\right].$$

Le terme MII' est l'énergie relative des deux courants : c'est le travail qu'il aurait fallu dépenser pour amener les circuits traversés par les courants I et I' de l'infini à leur position

actuelle. Chacun des autres termes compris dans la parenthèse peut être appelé l'*énergie intrinsèque* du courant correspondant; il est égal à la moitié du produit du coefficient de self-induction par le carré de l'intensité, et représente le travail que coûterait la création du courant actuel dans chaque circuit, celui-ci étant soustrait à toute action étrangère, ou le travail extérieur que pourrait développer ce courant s'il était abandonné à lui-même et s'annulait dans les mêmes conditions.

Remarquons enfin que l'on peut écrire

$$\frac{LI^2}{2}+MII'+\frac{L'I'^2}{2}=\frac{1}{2}(LI+MI')I+\frac{1}{2}(L'I'+MI)I'.$$

Chacun des deux termes du second membre représente l'énergie potentielle du circuit correspondant : c'est le travail qu'il faut dépenser, pour chacun des circuits, quand on amène le champ de zéro à son état actuel, et par conséquent le travail qu'il rendrait si on annulait en même temps tous les courants. Cette énergie est égale, pour chacun des circuits, à la moitié du produit de l'intensité par le flux de force magnétique qui le traverse.

La portion de l'énergie considérée ici est sous une forme qu'il ne semble pas possible de préciser dans l'état actuel de la science. On ne peut dire, par exemple, si elle existe à l'état d'énergie potentielle ordinaire, comme serait la tension d'un corps élastique, ou d'une énergie actuelle, consistant dans le mouvement d'un fluide particulier, ou bien encore sous les deux formes à la fois; ni si elle est localisée dans le circuit traversé par le courant ou, suivant les idées de Faraday et de Maxwell, répandue dans le milieu tout entier.

525. — Dans le cas général où les facteurs L, M et L′ sont variables, le premier terme de l'expression (17) représente toujours la variation de l'énergie potentielle des deux circuits; l'ensemble des autres termes

$$\frac{1}{2}I^2dL+II'dM+\frac{1}{2}I'^2dL'$$

représente le travail effectué par les actions électrodynami-

ques des conducteurs, par suite de leurs variations de forme ou de position relative.

Supposons que les deux circuits aient une forme invariable et qu'on les déplace de telle manière que les deux intensités I et I′ gardent des valeurs constantes, différentes naturellement des valeurs initiales ou finales; le coefficient M étant alors seul variable, le terme de l'énergie potentielle et celui du travail extérieur se réduisent tous deux à la même valeur $II'dM$. On a donc, à chaque instant,

$$(EI + E'I' - RI^2 - R'I'^2)dt = 2II'dM.$$

On voit que l'excès de l'énergie chimique fournie par les piles, sur l'énergie dépensée en chaleur, est égale au double du travail extérieur dépensé pour opérer le déplacement : une moitié de cette énergie est employée à produire le travail extérieur, l'autre à accroître l'énergie potentielle du système.

Cette remarque, due à sir W. Thomson, doit être rapprochée de la proposition analogue relative au déplacement des conducteurs à potentiels constants (92).

CHAPITRE CINQUIÈME

CAS PARTICULIERS D'INDUCTION

526. La résistance électromagnétique est une vitesse. — Considérons le cas (fig. 114) d'une barre CC′ glissant parallèlement à elle-même sur deux rails parallèles AA′, BB′, à la distance b, situés dans un plan perpendiculaire au méridien magnétique, et dont les extrémités A et B sont réunies par un conducteur métallique. Supposons que la composante horizontale du champ terrestre soit dirigée d'avant en arrière. Quand on donne au pont CC′ un déplacement qui l'éloigne de AB, parallèlement à lui-même, on l'entraîne dans le sens où le pousserait l'action de la terre si le circuit était traversé par un courant allant de A en B par le pont. Ce mouvement produit un courant d'induction qui parcourt le circuit en sens contraire, c'est-à-dire qui va de B en A par le pont.

Si on considère la résistance des rails comme négligeable devant celle du conducteur extérieur qui réunit les points A et B, et qu'on appelle R la résistance du circuit supposée invariable, x_1 et x_2 les valeurs de la distance AC dans deux positions successives du pont, et H la composante horizontale du champ magnétique terrestre, la quantité M correspondante d'électricité induite sera donnée par l'équation

$$RM = Q_1 - Q_2 = bH(x_1 - x_2).$$

Comme le produit $b(x_1 - x_2)$ représente la surface S décrite

par le pont, il en résulte

$$R = \frac{SH}{M}.$$

Dans cette expression, le facteur H est l'intensité d'un champ magnétique, c'est-à-dire une force qui s'exerce sur l'unité de masse ; on peut donc poser, en désignant par r et par l deux longueurs, et m une masse magnétique,

$$SH = \frac{m}{r^2} l^2.$$

D'autre part, la masse électrique M est le produit par un temps d'une intensité de courant, ou de la puissance magnétique d'un feuillet, et l'on peut écrire aussi

$$M = It = \Phi t = h\sigma t = h \frac{m'}{l'^2} t,$$

m' désignant une masse magnétique de grandeur convenable et h et l' des longueurs. On aura donc

$$R = \frac{m}{m'} \frac{l^2}{r^2} \frac{l'}{h} \frac{l'}{t}.$$

Les trois premières fractions étant des nombres abstraits, on voit que la résistance exprimée en unités électromagnétiques est égale au quotient d'une longueur par un temps, c'est-à-dire une quantité de même nature qu'une vitesse.

Il est facile de trouver dans l'expérience même la représentation physique de cette vitesse. Supposons, en effet, qu'on déplace la barre transversale d'un mouvement uniforme avec une vitesse u, et que l'intensité I du courant produit soit mesurée par l'action qu'il exerce sur une aiguille placée au centre d'une boussole des tangentes (**501**); on aura

$$\tang \delta = \frac{L}{a^2} \frac{H}{I}.$$

On a, d'autre part, MR = HS, ou

$$\mathrm{RI}t = \mathrm{H}but;$$

il en résulte

$$\tang \delta = \frac{\mathrm{L}}{a^2}\frac{bu}{\mathrm{R}}.$$

Si la vitesse u est assez grande pour que l'action du courant soit égale à celle de la terre, c'est-à-dire que la déviation de l'aiguille dans la boussole soit de 45°, on aura

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{L}b}{a^2}u,$$

et, si l'on prend $a^2 = \mathrm{L}b$, il reste $\mathrm{R} = u$.

Ainsi, la résistance du circuit considéré est égale à la vitesse avec laquelle il faudrait déplacer le pont d'un mouvement uniforme, dans les conditions indiquées, pour que l'action du courant induit sur une boussole de dimensions convenables produise une déviation de 45°.

527. — L'expérience suivante, indiquée par Faraday, peut être considérée comme une application du même problème.

Supposons que deux électrodes A et B soient plongées dans l'eau, aux bords opposés d'une rivière, d'un canal ou d'un courant marin, et reliées entre elles par un conducteur métallique. Si u est la vitesse du courant et a la distance des électrodes, il s'établira entre elles, sous l'influence du magnétisme terrestre, une force électromotrice égale à $u\mathrm{Z}a$, qui donnerait dans un circuit de résistance R un courant d'intensité $\frac{ua\mathrm{Z}}{\mathrm{R}}$. L'expérience n'est pas irréalisable ; mais, à moins de pouvoir opérer avec des valeurs très grandes de u et de a, la polarisation des électrodes rendrait, sans doute, difficile la vérification de cette conséquence.

528. Circuit fermé dans un champ uniforme. — Considérons un circuit fermé que nous pouvons supposer plan (**487**), et soit S sa surface. Supposons qu'il soit placé dans un champ uniforme d'intensité F, le champ terrestre par exemple, et perpendiculaire à la direction du champ. Si on fait tourner le

cadre d'un angle α, la variation du flux de force magnétique est égale à $FS(1-\cos\alpha)$, et la quantité M d'électricité mise en mouvement dans le circuit, supposé de résistance R, est donnée par la relation

$$M=\frac{FS(1-\cos\alpha)}{R}.$$

Si le cadre tourne de 180°, face pour face, on a

$$M=\frac{2FS}{R}.$$

Cette quantité d'électricité peut être mesurée en valeur absolue (**506**) par l'impulsion qu'elle imprime à l'aiguille d'un galvanomètre, ce qui permettrait de déterminer l'intensité du champ magnétique.

Le sens du courant, d'après la loi de Lenz, est celui qui devrait parcourir le circuit dans la position primitive pour que ce circuit soit en équilibre stable.

529. Détermination de l'inclinaison par les courants induits. — Nous avons vu (**187**) que la tangente de l'inclinaison magnétique est égale au rapport des travaux qui correspondent, pour une même intensité de courant, à une rotation de 180° du circuit à partir d'une position perpendiculaire au méridien magnétique : 1° autour d'un axe horizontal perpendiculaire au méridien; 2° autour d'un axe vertical. Ce rapport est celui des forces électromotrices d'induction pour les mêmes déplacements, et, par suite, celui des quantités correspondantes d'électricité induite (**506**); la mesure de ce dernier rapport donnera donc l'inclinaison.

530. Disque de Faraday. — Un disque de métal, mobile dans un champ uniforme autour d'un axe parallèle à la direction du champ, fait partie d'un circuit formé par un conducteur qui communique, d'une part à l'axe de rotation, et d'autre part à une lame de ressort qui appuie sur un point de la circonférence. Lorsqu'on imprime au disque un mouvement de rotation uniforme, il se produit également dans le circuit un courant uniforme. On voit que la disposition de cette expérience

est pour ainsi dire l'inverse de celle de Barlow (483). Si, le plan du disque étant vertical, la force du champ F le traverse d'avant en arrière et que le sens de la rotation soit celui des aiguilles d'une montre, le courant induit parcourt le disque du centre à la circonférence.

La force électromotrice a pour expression, en désignant par a le rayon du disque et ω la vitesse angulaire,

$$e = \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega a^2}{2} F.$$

On obtiendrait un résultat analogue, mais avec un calcul moins simple, en plaçant le disque entre les pôles d'un aimant en fer à cheval ou entre les armatures de deux électro-aimants. Sous cette dernière forme, M. Le Roux a obtenu des courants assez intenses pour produire de vives étincelles entre le disque et le ressort.

D'ailleurs toutes les expériences, en particulier celles qui ont été examinées dans le chapitre III, où le mouvement d'un conducteur est provoqué par des actions électromagnétiques ou électrodynamiques, donneraient lieu à un courant inverse d'induction si le mouvement était entretenu par une cause étrangère.

531. Courants terrestres. — Considérons, par exemple, une sphère aimantée uniformément. Supposons qu'un arc conducteur, s'appuyant par l'une de ses extrémités sur le pôle et par l'autre sur l'équateur, tourne autour de l'axe d'un mouvement uniforme; cet arc coupera le même flux de force que s'il était appliqué sur la surface le long d'un méridien. Un élément ds, dont la vitesse est v, coupe dans chaque unité de temps un flux de force égal à $Zv\,ds$, Z étant la composante normale de la force magnétique sur le parallèle correspondant. Si on appelle V la vitesse à l'équateur, F_p la force magnétique au pôle, a le rayon de la sphère et λ la latitude de l'élément ds, on a

$$v = V\cos\lambda, \qquad Z = F_p \sin\lambda, \qquad ds = a\,d\lambda.$$

Le flux de force coupé dans chaque unité de temps par l'arc

entier est [illegible] l'induction [illegible] ce qui donne

$$[illegible]$$

Si [illegible] différence de [illegible] extrémités. Si les [illegible] le même [illegible] moins [illegible] sont

la valeur [illegible]

Enfin [illegible] immobile situé à l'[illegible] serait parcouru par [illegible] l'équateur [illegible]

Comme [illegible] sphère terrestre [illegible] qui ne participerait pas [illegible] devrait être parcouru par [illegible] l'équateur vers le [illegible] induits ne [illegible] système magnétique [illegible] joue un rôle important [illegible] comme les [illegible] électriques dans [illegible] courants [illegible] telluriques et les perturbations [illegible] magnétiques.

532. État variable du courant. — L'établissement d'un courant dans un circuit correspond à un certain travail, qui représente l'énergie potentielle du courant; cette énergie est empruntée au début du courant, probablement par le milieu (521), et restituée au moment où les forces électromotrices disparaissent. Dans tous les cas, les effets de self-induction qui en sont la conséquence déterminent la loi de l'intensité pendant la période variable, soit au moment de la fermeture, soit au moment de la rupture du circuit.

Considérons un circuit unique. Soit R sa résistance totale, L son coefficient de self-induction et E la force électromotrice qu'il renferme. On a l'équation

$$(1) \qquad E = \frac{d(LI)}{dt} + RI.$$

Si on suppose L constant, ainsi que E, l'intensité à chaque instant est donnée par la formule

$$(2) \qquad I = I_1 + (I_0 - I_1)e^{-\frac{Rt}{L}},$$

I_0 étant la valeur initiale et I_1 la valeur finale qui correspond à l'état permanent.

La quantité totale d'électricité qui passe pendant le temps t a pour expression

$$\int_0^t I\,dt = I_1 t + (I_0 - I_1)\frac{L}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Si le temps t est assez grand, il reste simplement

$$(3) \qquad \int_0^t I\,dt = I_1 t + (I_0 \quad I_1)\frac{R}{L}.$$

On a également, pour un temps suffisamment long,

$$(4) \qquad \int_0^{t} I^2\,dt = I_1^2 t + (I_0 - I_1)\left(\frac{I_0 + 3I_1}{2}\right)\frac{L}{R};$$

cette expression est proportionnelle à l'énergie calorifique dépensée dans le circuit.

On peut remarquer que les valeurs de ces deux intégrales sont les mêmes que si l'on avait eu dans le circuit un courant d'intensité $\frac{I_0 + I_1}{2}$ pendant le temps $\frac{2L}{R}$, auquel aurait

succédé un courant d'intensité normale I_1 pendant le reste du temps $t - \frac{2L}{R}$.

Supposons que la force électromotrice soit constante et qu'on compte le temps à partir de la fermeture du circuit; on a alors

$$I_0 = 0, \quad I_1 = \frac{E}{R}$$

et, par suite,

$$(5) \qquad I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

333. — L'expression $\frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$ représente l'intensité de l'extra-courant à l'instant t. On voit qu'en toute rigueur le courant n'atteindra son intensité normale qu'au bout d'un temps infini; mais, si le rapport $\frac{R}{L}$ est très grand, ce qui a lieu dans la plupart des cas, l'exponentielle tend rapidement vers zéro et, au bout d'un temps très court, l'intensité réelle ne diffère que d'une quantité négligeable de l'intensité finale. Pour calculer au bout de quel temps cette différence serait au-dessous d'une quantité donnée, $\frac{1}{n}$ par exemple, il suffit de poser

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{n},$$

d'où l'on déduit

$$t = \frac{L}{R} l.n.$$

La quantité totale d'électricité qui correspond à l'extra-courant est

$$(6) \qquad \frac{E}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{Rt}{L}} dt = \frac{EL}{R^2};$$

elle est la même que si le courant avait eu une intensité moitié moindre que la valeur normale, $\frac{1}{2}\frac{E}{R}$, pendant le temps $\frac{2L}{R}$.

534. Extra-courant de rupture. — Supposons que, le régime permanent étant établi, on introduise subitement une résistance r dans le circuit; on aura, aux deux limites,

$$I_0 = \frac{E}{R},$$

$$I_1 = \frac{E}{R+r},$$

et l'intensité sera donnée à chaque instant par l'équation

$$(7) \qquad I = \frac{E}{R+r}\left(1 + \frac{r}{R} e^{-\frac{R+r}{L}t}\right).$$

La quantité totale d'électricité qui correspond à l'extra-courant a pour valeur

$$(8) \qquad \frac{Er}{(R+r)R}\int_0^\infty e^{-\frac{R+r}{L}t}dt = \frac{EL}{(R+r)^2}\frac{r}{R}.$$

Ce cas présente une certaine analogie avec celui où l'on rompt le circuit dans l'air, la résistance r étant celle de la couche de gaz traversée par l'étincelle de rupture; mais, en réalité, cette résistance est loin de rester constante pendant la durée du phénomène.

Supposons qu'au lieu de rompre le circuit, on l'ait séparé de la pile en remplaçant celle-ci par un fil de même résistance, de manière que la résistance totale du circuit soit toujours représentée par R, ce qui revient simplement à supprimer la force électromotrice. L'équation (1) se réduit à

$$(9) \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

En déterminant la constante par la condition que pour $t = 0$, on ait $I = \frac{E}{R}$, on obtient

$$(10) \qquad I = \frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Dans ce cas, la loi de l'extra-courant de rupture est la même que celle du courant de fermeture (533), et les quantités d'électricité mises en mouvement sont identiques.

535. Force électromotrice variable. — Supposons que la force électromotrice, au lieu d'être constante comme avec les piles ordinaires, présente des variations périodiques et soit représentée par une expression de la forme

$$(11) \qquad E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Lorsque le régime définitif est établi, l'intensité du courant suit évidemment la même période, et on peut la représenter par l'expression

$$(12) \qquad I = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi \right).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (11), et déterminant les constantes A et φ par la condition qu'elle soit satisfaite pour un temps quelconque, on trouve

$$(13) \qquad A^2 = \frac{E_0^2}{R^2 + \frac{4\pi^2 L^2}{T^2}}.$$

et

$$(14) \qquad \text{tang}\, 2\pi\varphi = \frac{2\pi}{T} \frac{L}{R}.$$

On voit par là que le coefficient de self-induction a pour effet d'augmenter la résistance apparente du circuit. L'intensité du courant est nulle toutes les fois que l'on a $t - \varphi T = n \frac{T}{2}$. La quantité φT exprime le temps qui s'écoule entre le moment où la force électromotrice est nulle et celui où le courant passe lui-même par zéro. C'est une sorte de *retard* à la transmission de la force électromotrice, qui tient uniquement aux effets d'induction.

Quelles que soient les valeurs de L, de R et de T, la valeur

maximum de $2\pi\varphi$ est $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la différence de phase φ est égale à $\frac{1}{4}$. Le retard maximum du courant induit est donc égal au quart de la période entière ou à la moitié de la demi-période.

Pendant une demi-période, la quantité d'électricité qui passe dans le circuit est

$$(15) \qquad Q = A\int_0^{\frac{T}{2}} \sin 2\pi\frac{t}{T}\,dt = \frac{AT}{\pi},$$

et le travail calorifique correspondant

$$(16) \qquad W = RA^2\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi\frac{t}{T}\,dt = R\frac{A^2T}{4}.$$

On en déduit, pour l'intensité moyenne I' du courant, abstraction faite du signe,

$$(17) \qquad I' = \frac{2A}{\pi},$$

et, pour l'intensité moyenne I'' qui donnerait la même quantité de chaleur,

$$(18) \qquad I'' = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

536. Courant de décharge. — Décharges oscillantes. — Considérons enfin, d'après sir W. Thomson, les phénomènes qui accompagnent la décharge d'un conducteur. Soit C la capacité en mesures électromagnétiques du corps électrisé, Q_0 sa charge ; on le met en communication avec le sol par un fil de résistance R et dont le coefficient de self-induction est L. A un instant donné t, la charge du conducteur est Q et son potentiel $\frac{Q}{C}$, ce qui donne l'équation

$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} + RI.$$

[illegible] deuxième degré [illegible]

[illegible] mag[illegible]

[illegible] condition que [illegible]

[illegible] prend[illegible] [illegible] même forme, et remplacer les con[illegible] [illegible] imaginaires. En ne conservant ensui[illegible]

que les termes réels, et posant $\alpha' = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$, on obtient,

(23)
$$\begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\cos\alpha' t + \frac{R}{2\alpha' L}\sin\alpha' t\right], \\ I &= \frac{Q_0}{\alpha' LC} e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin\alpha' t. \end{aligned}$$

On déduit de ces équations, dans les deux cas,

(24)
$$\begin{aligned} \int_0^\infty I\,dt &= Q_0, \\ \int_0^\infty I^2 dt &= \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{RC}. \end{aligned}$$

Ces résultats étaient évidents *à priori*, puisque la décharge est complète et que le travail qu'elle produit se réduit à un dégagement de chaleur; le travail calorifique $\int_0^\infty RI^2 dt$ doit être égal à l'énergie électrique (80) que possédait le conducteur avant la décharge, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$.

537. — Le caractère de la décharge est très différent, suivant que la solution est donnée par les équations (22) ou les équations (23).

Dans le premier cas, la décharge est *continue*. L'intensité du courant commence par être nulle, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à zéro. Le maximum a lieu à l'époque déterminée par la condition $\frac{dI}{dt} = 0$, ou

$$\left(\frac{R}{2L} - \alpha\right) e^{2\alpha t} = \frac{R}{2L} + \alpha,$$

qui donne

$$t = \frac{1}{2\left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}\right)^{\frac{1}{2}}} \, l.\frac{\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}.$$

538. — Dans le second cas, les valeurs de Q et de I sont données par des fonctions périodiques : le conducteur prend des charges alternativement de sens contraires et le fil est le siège de *courants alternatifs*.

Les instants des maxima et des minima de charge correspondent à $I = 0$, c'est-à-dire à

$$\sin\alpha' t = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha' t = n\pi.$$

Les oscillations de la décharge sont donc régulières et la période complète T a pour valeur

$$T = \frac{2\pi}{\alpha'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Les valeurs de charge maxima alternatives sont

$$\begin{aligned}
&+Q_0,\\
&-Q_0 e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}},\\
&+Q_0 e^{-\frac{2R\pi}{2L\alpha'}},\\
&-Q_0 e^{-\frac{3R\pi}{2L\alpha'}}, \text{ etc.};
\end{aligned}$$

elles décroissent comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est $e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}$.

Les maxima d'intensité du courant dans les deux sens correspondent à $\frac{dI}{dt} = 0$, ce qui donne

$$\operatorname{tang}\alpha' t = \frac{2L\alpha'}{R},$$

ou

$$\sin\alpha' t = \pm\alpha'\sqrt{CL};$$

ils sont encore équidistants, séparés par une demi-période $\frac{\pi}{\alpha'} = \frac{T}{2}$, et éloignés des époques de courant nul, qui les pré-

cèdent immédiatement, du temps θ déterminé par le plus petit angle $\alpha'\theta$ qui satisfait à la condition

$$\sin \alpha'\theta = \alpha'\sqrt{CL}.$$

Les valeurs des maxima d'intensité sont successivement

$$I_1 = +\frac{Q_0}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R\theta}{2L}},$$
$$I_2 = -\frac{Q}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta+\frac{\pi}{\alpha'}\right)} = -I_1 e^{-\frac{R\pi}{2\alpha' L}},$$
$$I_3 = +\frac{Q}{\sqrt{CL}} e^{-\frac{R}{2L}\left(\theta+\frac{2\pi}{\alpha'}\right)} = +I_1 e^{-\frac{2R\pi}{2\alpha' L}}, \text{etc.};$$

ils décroissent également en progression géométrique.

Quant à la quantité totale d'électricité mise en mouvement, abstraction faite du signe, elle est

$$(25)\quad Q_0\left(1 + 2e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}} + 2e^{-\frac{2R\pi}{2L\alpha'}} + \ldots\ldots\right) = Q_0 \frac{1 + e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}}{1 - e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}}.$$

Cette masse totale est d'autant plus grande que la quantité $e^{-\frac{R\pi}{2L\alpha'}}$ est plus voisine de l'unité, c'est-à-dire que le facteur $\frac{2L\alpha'}{R}$ ou le rapport $\frac{L}{CR^2}$ est plus grand.

539. — On passerait au cas d'un courant continu en faisant $Q_0 = \infty$, $C = \infty$ et $\frac{Q}{C} = E$. Les racines de l'équation (21) sont alors réelles et la décharge continue ; on retombe aussi sur la formule déjà trouvée (**532**).

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

Si on suppose que le coefficient de self-induction L est très

petit, on se trouve toujours dans le cas des racines réelles; le coefficient α devient alors égal à $\frac{R}{2L}\left(1-\frac{2L}{CR^2}\right)$ ou $\frac{R}{2L}-\frac{1}{CR}$, et les équations (22) deviennent

$$(26)\qquad \begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},\\ I &= \frac{Q_0}{CR} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Le courant s'établit alors immédiatement avec sa valeur maximum, puis diminue indéfiniment.

On doit remarquer cependant que toute la discussion qui précède repose sur l'hypothèse implicite que l'électricité n'a pas par elle-même d'*inertie* et que l'intensité est la même à chaque instant dans toute l'étendue du fil. Ces hypothèses paraissent justifiées dans tous les cas de courants permanents ou de variations lentes, mais il n'est plus permis de les admettre quand il s'agit de décharges brusques; les résultats auxquels nous sommes arrivés ne doivent donc être considérés que comme une première approximation.

310. Cas de deux circuits. — Considérons deux circuits voisins C et C', dont la position relative soit invariable et qui renferment des forces électromotrices constantes; nous représentons par E, R et L la force électromotrice, la résistance et le coefficient de self-induction du premier circuit; par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues du second; et par M le coefficient d'induction mutuelle. Tous ces coefficients étant supposés constants, on aura (**322**) les deux équations simultanées

$$(27)\qquad \begin{aligned} M\frac{dI'}{dt}+L\frac{dI}{dt}+RI-E&=0,\\ M\frac{dI}{dt}+L'\frac{dI'}{dt}+R'I'-E'&=0, \end{aligned}$$

dont la solution est de la forme

$$(28)\qquad \begin{aligned} RI-E&=Ae^{\rho t}+Be^{\rho' t},\\ R'I'-E'&=A'e^{\rho t}+B'e^{\rho' t}. \end{aligned}$$

Les coefficients A, B, A', B' sont des constantes à déterminer d'après les conditions relatives aux limites.

En exprimant la condition que ces valeurs des intensités satisfassent aux équations différentielles (27), quel que soit le temps, on trouve que les exposants ρ et ρ' sont les racines de l'équation du second degré

$$(29)\qquad \left(1-\frac{M^2}{LL'}\right)\rho^2+\left(\frac{R}{L}+\frac{R'}{L'}\right)\rho+\frac{RR'}{LL'}=0.$$

Ces racines sont toujours réelles; de plus, elles doivent être négatives attendu que l'intensité ne peut dans aucun des circuits croître indéfiniment avec le temps. Il faut donc qu'on ait $LL'>M^2$, ce qui est d'ailleurs évident (**519**); on ne pourrait avoir $LL'=M^2$ que si les deux circuits coïncidaient.

Il résulte aussi de cette condition que si le coefficient de self-induction L d'un fil est très petit, le coefficient d'induction mutuelle M de ce fil avec un autre fil quelconque est également très petit.

541. — Considérons le cas où $E'=0$, c'est-à-dire que le second circuit ne renferme pas de force électromotrice.

Si on veut avoir seulement les quantités d'électricité m et m' qui traversent les deux circuits pendant un temps t, il suffit de calculer par les équations (27) les intégrales $\int I\,dt$ et $\int I'\,dt$. En désignant par I_0 et I'_0 les intensités des deux courants à l'origine du temps considéré, on aura

$$(30)\qquad \begin{aligned} Rm &= Et+L(I_0-I)+M(I'_0-I'),\\ R'm' &= M(I_0-I)+L'(I'_0-I'). \end{aligned}$$

Supposons qu'on ferme le circuit C, et que l'on considère le phénomène au bout d'un temps suffisamment grand, on aura

$$I_0=0,\qquad I'_0=0,$$
$$I=\frac{E}{R},\qquad I'=0;$$

et, par suite,

$$(31)\qquad \begin{aligned} m &= I\left(t - \frac{L}{R}\right) = \frac{E}{R}\left(t - \frac{L}{R}\right), \\ m' &= -\frac{M}{R}I = -\frac{E}{R}\frac{M}{R'}. \end{aligned}$$

Si, au contraire, le régime permanent étant établi, on ouvre le circuit C, on a, aux deux limites,

$$I_0 = \frac{E}{R}, \qquad I'_0 = 0,$$
$$I = 0, \qquad I' = 0.$$

Les quantités d'électricité induite dans les deux circuits sont alors égales et de signes contraires à celles du cas précédent, ce qui était évident, puisque la variation du flux de force a été le même dans les deux cas.

Il est à remarquer que l'extra-courant de C est indépendant du circuit C' et, d'autre part, que l'induction sur le circuit C' ne dépend que de sa résistance R', du coefficient d'induction mutuelle des deux circuits, et de l'intensité I du courant permanent dans le circuit C. La considération directe des flux de force permettait encore de prévoir ces résultats.

Pour connaître l'intensité des courants à chaque instant, il faut compléter la solution du problème par la détermination des constantes.

512. Courant de rupture. — Considérons d'abord le cas où, le courant étant établi dans le circuit principal C, on rompt la communication avec la pile en laissant le circuit ouvert; il se forme un courant induit dans le circuit secondaire C', mais le courant principal est *entièrement* supprimé. La première des équations (27) n'existe plus et la seconde se réduit à

$$L'\frac{dI'}{dt} + R'I' = 0;$$

elle est identique à l'équation (9) et, par suite, la loi de l'extra-courant sera la même dans les deux cas.

On peut même, dans l'hypothèse que la rupture du circuit C a été instantanée, et que le courant ne s'est point prolongé avec une résistance variable, comme dans le cas où il se produit une étincelle, déterminer la valeur initiale du courant produit en C'.

Intégrons la seconde des équations (27), en y supposant $E'=0$, depuis $t=0$ jusqu'à un temps τ infiniment petit par rapport à la durée du courant d'induction dans C'; on aura, en désignant par I'_1 l'intensité du courant induit à l'instant τ, l'équation

$$(32) \qquad -M\frac{E}{R}+L'I'_1+R'\int_0^\tau I'dt=0.$$

Si on fait tendre τ vers zéro, le dernier terme tend lui-même vers zéro, attendu que τ a une valeur infiniment petite et que l'intensité I' du courant garde une valeur finie; on a donc, à la limite,

$$(33) \qquad I'_1=\frac{M}{L'}\frac{E}{R}.$$

Ainsi l'intensité initiale du courant induit est à l'intensité du courant inducteur dans le rapport des coefficients M et L'.

On aura à un instant quelconque, d'après l'équation (10),

$$(34) \qquad I'=\frac{ME}{L'R}e^{-\frac{R't}{L'}}.$$

On en déduit, pour la quantité d'électricité mise en mouvement,

$$\int_0^\infty I'dt=\frac{ME}{L'R}\frac{L'}{R'}=\frac{E}{R}\frac{M}{R'},$$

et, pour le travail calorifique dépensé dans le circuit,

$$R\int_0^\infty I'^2dt=\frac{E^2}{R}\frac{M^2}{2R'L'}.$$

543. Courant de fermeture. — Au moment où l'on ferme le

circuit inducteur, les deux circuits réagissent l'un sur l'autre et il faut tenir compte des deux équations simultanées (27).

Si on pose

$$(35)\qquad \alpha = \sqrt{\left(\frac{RL' - R'L}{2RM}\right)^2 + \frac{R'}{R}},$$

les racines de l'équation (29) sont

$$\rho = \frac{-(RL' + R'L) + 2RM\alpha}{2(LL' - M^2)},$$

$$\rho' = \frac{-(RL' + R'L) - 2RM\alpha}{2(LL' - M^2)}.$$

On déterminera les coefficients à l'aide des équations (27) et (28) par la condition que, pour $t = 0$, on ait $I = 0$ et $I' = 0$, ce qui donne

$$\frac{M}{R}(A\rho + B\rho') + \frac{L}{R}(A'\rho + B'\rho') = E,$$

$$\frac{M}{R}(A'\rho + B'\rho') + \frac{L'}{R}(A\rho + B\rho') = 0,$$

$$A + B + E = 0,$$

$$A' + B' = 0.$$

On obtient alors

$$(36)\qquad \begin{cases} I = \dfrac{E}{R}\left\{1 - \dfrac{1}{2}\left[\left(1 - \dfrac{RL' - R'L}{2RM\alpha}\right)e^{\rho t} + \left(1 + \dfrac{RL' - R'L}{2MR\alpha}\right)e^{\rho' t}\right]\right\}, \\ I' = -\dfrac{E}{2R\alpha}\left(e^{\rho t} - e^{\rho' t}\right). \end{cases}$$

La dérivée de la dernière équation

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{E}{2R\alpha}\left(\rho e^{\rho t} - \rho' e^{\rho' t}\right)$$

montre que, dans le circuit secondaire C', le courant induit, qui est toujours négatif puisqu'on a $\rho' > \rho$ en valeurs abso-

lues, part de zéro, sans que sa dérivée initiale soit nulle, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro.

Quant au courant inducteur, on voit que, partant de zéro, il tend progressivement vers sa valeur maximum $\frac{E}{R}$ relative au régime permanent.

Si on suppose les deux circuits C et C' identiques, les formules se réduisent à

$$(37)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right)\right], \\ I' &= -\frac{E}{2R}\left[e^{-\frac{Rt}{L+M}} - e^{-\frac{Rt}{L-M}}\right]. \end{aligned}$$

Si, en outre, les deux circuits sont en contact, les coefficients L et M diffèrent très peu l'un de l'autre et l'on a sensiblement

$$(38)\qquad \begin{aligned} I &= \frac{E}{R}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{Rt}{2L}}\right], \\ I' &= -\frac{E}{2R}e^{-\frac{Rt}{2L}}. \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, l'intensité du courant direct produit au moment de l'ouverture du circuit (**531**) a pour valeur

$$(39)\qquad I'_1 = \frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Les deux courants induits atteignent leur maximum pour $t=0$, et ce maximum est deux fois aussi grand pour le courant direct que pour le courant inverse.

541. Deux circuits avec une force électromotrice variable. — Supposons que l'on ait

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi}{T}t,$$

et que le second circuit soit fermé sur lui-même, sans renfermer de force électromotrice.

Lorsque le régime régulier est établi, les deux courants sont encore périodiques, et on peut écrire, comme au n° 222,

$$I = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right),$$

et

$$I' = A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi'\right).$$

La condition que les équations différentielles (39) soient satisfaites, pour une époque quelconque, par ces valeurs de t, I, I' donne, en posant

$$r = R + \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{M^2 R'}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}L'^2},$$

$$l = L - \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{M^2 L'}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}L'^2},$$

les valeurs suivantes pour les constantes du premier courant :

(41)

$$A^2 = \frac{E^2}{r^2 + \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}},$$

$$\tan g\, 2\pi\varphi = \frac{2\pi}{T}\frac{l}{r}.$$

Ces expressions ont la même forme que plus haut (222). On voit que la présence du second circuit a pour effet d'augmenter encore la résistance apparente du premier, et de diminuer son coefficient apparent de self-induction.

On trouverait, de même, pour le second circuit,

(42)

$$A'^2 = A^2 \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{M^2}{R'^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}L'^2},$$

$$\tan g\, 2\pi\varphi' = \frac{T}{2\pi}\frac{\frac{4\pi^2}{T^2}L'l - R'r}{L'r + R'l}.$$

L'amplitude A′ est d'abord en raison inverse de la période, tant que les oscillations ne sont pas rapides; pour une période très petite, on aurait

$$\frac{A'}{A}=\frac{M}{L'}.$$

Ce problème correspond au cas d'une bobine d'induction dont le courant inducteur serait sinusoïdal.

545. Téléphones et microphones. — Pour un circuit placé dans un champ magnétique variable, l'équation (10) du n° **518** devient

$$(43)\qquad \frac{dQ}{dt}+L\frac{dI}{dt}+I\frac{dL}{dt}+RI-E=0.$$

Imaginons que le circuit renferme une force électromotrice constante et que le coefficient Q varie d'une manière périodique. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, pour un électro-aimant devant lequel on ferait osciller un aimant. On peut écrire alors

$$Q=Q_0+Q_1\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Le résultat est le même que si la force électromotrice de la pile éprouvait une variation périodique égale à $Q_1\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}$.

Lorsque le régime définitif est établi, le courant induit oscille suivant la même période et peut encore être représenté par l'expression

$$I=I_0+A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varphi\right).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (43), on en déduit

$$\tan g\, 2\pi\varphi=-\frac{TR}{2\pi L},$$

$$A^2=\frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{Q_1^2}{R^2+\frac{4\pi^2L^2}{T^2}}.$$

Si la force électromotrice E est nulle, le courant transmis est périodique ; c'est le cas du *téléphone*.

Toutes les autres quantités étant constantes, il peut arriver que la résistance R varie d'une manière périodique : le courant sera encore périodique, et l'amplitude des variations sera proportionnelle à l'intensité du courant permanent qui se produirait avec une résistance constante, c'est-à-dire proportionnelle à la force électromotrice.

Un pareil courant provoquera dans un circuit voisin des courants induits périodiques. C'est ce qui a lieu dans le *microphone*, où les variations de résistance sont produites par les vibrations de deux corps en contact, tels que des morceaux de charbon ; il en est de même dans le *photophone* à sélénium, où l'on utilise les variations de résistance qu'un éclairage périodique produit dans ce corps.

On arriverait au même résultat si le coefficient de self-induction L était variable, ce qu'on pourrait obtenir, soit en déformant le circuit d'une manière périodique, soit en faisant osciller l'armature en fer d'un électro-aimant.

516. Lois des courants dérivés dans le régime variable. — La loi qui lie dans un polygone fermé les intensités des courants aux forces électromotrices (**211**) est encore applicable dans le régime variable, à la condition que l'on ajoute aux forces électromotrices ordinaires celles qui proviennent des effets d'induction.

Nous examinerons seulement le cas simple où le courant se bifurque entre deux points A et B, en suivant deux conducteurs de résistances r et r' qui ne renferment pas de forces électromotrices. Pour fixer les idées, nous supposerons que ces conducteurs sont enroulés sous forme de bobines et nous appellerons L, L' et M leurs coefficients d'induction. Si, à un instant donné, on désigne par i et i' les intensités des courants dans les deux branches, on a

$$(44) \qquad ri+\frac{d}{dt}(\mathrm{L}-\mathrm{M})i=r'i'+\frac{d}{dt}(\mathrm{L}'-\mathrm{M})i'.$$

Considérons d'abord le cas où le second fil est déroulé ; le

coefficient L′ est très petit, et il en est de même du coefficient d'induction mutuelle M (540). L'équation (44) se réduit à

$$(45) \qquad ri - r'i' + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Tant que le courant général est croissant, on voit que l'intensité i' dans la branche rectiligne est plus grande qu'elle ne serait pour l'état permanent. La branche qui renferme une bobine a donc une résistance *apparente* supérieure à sa résistance *réelle*. La différence est d'autant plus grande que le coefficient L est plus grand et la variation de l'intensité plus rapide ; l'inverse a lieu quand l'intensité est décroissante. L'effet est le même dans le cas général où aucun des coefficients n'est nul, et l'équation (44) montre que chaque conducteur se comporte pour un courant croissant comme s'il avait une résistance d'autant plus grande que son coefficient de self-induction est plus grand.

547. — Soient m et m' les quantités d'électricité qui parcourent les deux conducteurs pendant le temps t, on a

$$rm - r'm' + \left[Li - L'i' + M(i' - i)\right]_0^t = 0.$$

Dans le cas d'une décharge, les intensités initiale et finale sont nulles; si les coefficients L, L′ et M sont restés constants, le terme entre parenthèses est nul, et il reste

$$(46) \qquad rm - r'm' = 0.$$

Il en résulte que les quantités totales d'électricité se sont partagées entre les deux branches en suivant la loi ordinaire, bien qu'à chaque instant le partage ait eu lieu d'une autre manière : il y a finalement compensation.

Cette conclusion n'est exacte que si les deux circuits n'ont produit extérieurement aucun travail ; en particulier si, pendant la durée de la décharge, aucun aimant n'a été déplacé dans le voisinage de l'un d'eux. Aussi est-il difficile, pour la mesure des décharges, d'employer un galvanomètre en dérivation.

548. — Si le courant principal est sinusoïdal, avec l'amplitude I_0, les deux courants dérivés finiront évidemment par avoir le même caractère périodique, avec une différence de phase inégale. Par des calculs analogues aux précédents, on trouvera, entre les amplitudes A et A' et les différences de phases φ et φ', les relations

$$\frac{A^2}{r'^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L'-M)^2}=\frac{A'^2}{r^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L-M)^2}=\frac{I_0^2}{(r+r')^2+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)^2},$$

$$\tan 2\pi\varphi=\frac{2\pi}{T}\frac{Lr'-L'r+M(r-r')}{(r+r')r'+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)(L'-M)},$$

$$\tan 2\pi\varphi'=\frac{2\pi}{T}\frac{L'r-Lr'+M(r'-r)}{(r+r')r+\frac{4\pi^2}{T^2}(L+L'-2M)(L-M)}.$$

Il y a évidemment une différence de phase entre le courant principal et la force électromotrice sinusoïdale qui le produit.

549. — Considérons encore, comme application, l'expérience par laquelle Faraday a démontré l'existence de l'extra-courant direct qui se produit au moment de la rupture d'un circuit. Une pile est fermée par un circuit à deux branches, comme celui que nous venons de considérer ; l'un des fils de résistance r' est rectiligne, l'autre de résistance r forme une bobine d'un grand nombre de spires.

Si on appelle E la force électromotrice de la pile, R sa résistance, et I le courant principal, on a, après la fermeture du circuit, les équations

$$(47)\quad \begin{aligned} I&=i+i',\\ E&=RI+r'i',\\ L\frac{di}{dt}+ri&=r'i'. \end{aligned}$$

En posant

$$\rho^2=Rr+Rr'+rr',$$

et remarquant que les courants sont nuls pour $t=0$, on en

déduit, pour le courant qui parcourt la bobine à l'époque t,

$$i=\frac{r'E}{\rho^2}\left(1-e^{-\frac{\rho^2 t}{L(R+r')}}\right),$$

et, pour celui qui traverse le fil rectiligne,

$$i'=\frac{rE}{\rho^2}\left(1+\frac{Rr'}{(R+r')r}e^{-\frac{\rho^2 t}{L(R+r')}}\right).$$

Si, une fois le régime établi, on rompt le circuit principal, sans que l'étincelle de rupture ait une durée sensible, les équations (47) donnent, en faisant $R=\infty$,

$$i+i'=0,$$

et, par suite,

$$L\frac{di}{dt}+(r+r')i=0.$$

L'intégrale de cette équation détermine le courant induit qui parcourt les deux branches. Si l'on remarque que le courant i est d'abord défini par le régime permanent, on aura, pour une époque t' à partir de la rupture du circuit,

$$i=\frac{Er'}{\rho^2}e^{-\frac{(r+r')t'}{L}}.$$

Ce courant est dirigé dans la branche rectiligne en sens contraire du courant primitif.

La quantité totale d'électricité induite a pour valeur

$$m=\frac{EL}{\rho^2}\frac{r'}{r+r'}.$$

Si l'aiguille d'un galvanomètre, placé sur le fil rectiligne, bute contre un obstacle qui l'empêche d'obéir au courant permanent, cette aiguille sera projetée en sens contraire, au moment de la rupture du circuit principal, par le courant d'induction. C'est la méthode employée par Faraday.

550. Phénomènes d'induction dans les câbles. — En étudiant la propagation de l'électricité dans les conducteurs cylindriques pendant l'état variable, nous avons négligé (**223**) les effets d'induction électrodynamique qui sont dus aux changements d'intensité du courant. Il résulte de là une nouvelle cause de retard dans l'établissement et la suppression du courant principal, et ce retard ne peut plus être calculé comme nous l'avons fait précédemment (**535**), parce que la durée de propagation est très notable par rapport à la durée des phénomènes d'induction ; il n'est pas possible d'admettre alors que l'intensité du courant a la même valeur à chaque instant dans toute l'étendue du circuit.

Si le fil éprouve une série de charges et de décharges alternatives, comme on le fait pour les transmissions télégraphiques, on peut considérer le phénomène comme étant dû à une force électromotrice variable et il se produira des effets analogues à ceux qui ont été indiqués plus haut.

En outre, le câble considéré peut être voisin d'autres câbles qui réagissent sur le premier, soit par leur simple présence, soit par les variations des courants propres qui les parcourent. Les effets qui en résultent sont très manifestes dans les fils aériens suspendus aux poteaux télégraphiques.

Enfin, lorsque plusieurs conducteurs sont renfermés dans une même gaine diélectrique, comme dans les câbles souterrains ou sous-marins, le potentiel en chaque point de l'un des fils dépend de la charge des fils voisins. Il en résulte un nouveau mode d'influence ou d'induction, purement électrostatique, et que sir W. Thomson a appelé *péristaltique* pour la distinguer de celle de Faraday. Ce phénomène présente une analogie parfaite avec l'influence mutuelle de tubes élastiques, réunis ensemble sur toute leur longueur, qui seraient remplis et entourés d'un même liquide, quand on fait circuler le liquide dans un ou plusieurs tubes, pendant que les autres ont leurs extrémités ouvertes ou fermées, ou soumises à toute autre condition particulière ; un tube fermé correspondrait à un fil conducteur isolé et un tube ouvert à un fil non isolé.

On voit, d'après ces indications, combien le problème de la propagation de l'électricité est complexe, quand on veut tenir

compte de toutes les circonstances capables d'influer sur le phénomène.

551. Calcul des coefficients d'induction. Solénoïdes. — Les exemples qui précèdent montrent le rôle important que jouent les coefficients M et L dans le calcul des phénomènes d'induction. Nous examinerons ici quelques cas simples, où ces coefficients peuvent être évalués directement.

Considérons d'abord un solénoïde cylindrique assez long pour qu'on puisse, dans une partie notable de sa longueur, négliger l'action des extrémités.

Si S est la section du cylindre, que nous supposerons circulaire, I l'intensité du courant et n_1 le nombre des spires par unité de longueur ; le flux de force ou d'induction magnétique est égal à $4\pi n_1 IS$ (**495**) et, quand le courant est égal à l'unité, ce flux a pour valeur

$$g = 4\pi n_1 S.$$

Supposons qu'on enroule sur le cylindre n' spires nouvelles d'un diamètre quelconque, le flux de force du premier circuit traverse n' fois la surface du second; le coefficient d'induction mutuelle est donc

$$(48) \qquad M = n'g = 4\pi n_1 n' S.$$

Le même flux traverse n_1 fois par unité de longueur la surface du premier circuit, de sorte que le coefficient de self-induction du solénoïde, par unité de longueur, est

$$(49) \qquad L_1 = n_1 g = 4\pi n_1^2 S.$$

Les valeurs trouvées pour les coefficients M et L_1 sont un maximum, car le flux de force réel est inférieur à $4\pi n_1 IS$, et ce flux diminue quand on s'approche des extrémités du solénoïde, où il devient même plus petit que $2\pi n_1 IS$. En effet, l'induction magnétique dans le cylindre aimanté uniformément qui équivaut au solénoïde (**373**) est égale à la résultante de la force $4\pi n_1 I$ parallèle à l'axe et de l'action des deux couches terminales, de densités uniformes $\pm\sigma = n_1 I$, laquelle est dirigée en sens contraire. Or, dans une section voisine de

la surface positive, cette surface émet vers l'intérieur un flux de force égal à $2\pi n_1 IS$, auquel il faut encore ajouter, pour obtenir le flux réel, la portion du flux émis par la surface négative et qui traverse le même contour.

552. Solénoïdes concentriques. — Supposons que les n' spires considérées forment un solénoïde concentrique au premier et de même longueur l. Désignons par r_1 et r_2 les deux rayons, et par n_1 et n_2 les nombres de spires contenues dans l'unité de longueur de chacun d'eux. Si l'on fait abstraction de l'action des extrémités, on peut écrire

$$M = n_2 l g = N g = 4\pi n_1 n_2 l S,$$

en posant

$$N = n_2 l,$$
$$g = 4\pi n_1 S = 4\pi^2 n_1 r_1^2.$$

Le facteur N représente le nombre total des spires du solénoïde extérieur, et g le flux de force produit dans le solénoïde intérieur par un courant égal à l'unité.

553. Bobines concentriques. — Considérons, de même, deux bobines concentriques, composées de plusieurs couches de fils également serrés en tous sens, de sorte que dans l'unité de surface d'un plan méridien le nombre des fils soit respectivement n_1^2 et n_2^2. Pour des couches d'épaisseurs dr_1 et dr_2 et de longueurs égales à l'unité, le nombre des fils sera de même $n_1^2 dr_1$ et $n_2^2 dr_2$. On aura donc

$$N = l n_2^2 \int dr_2,$$
$$g = 4\pi^2 n_1^2 \int r_1^2 dr_1,$$

l'intégrale devant être, pour chaque bobine, étendue à toute l'épaisseur. En désignant les rayons extrêmes par y_1 et x_1 pour la première bobine, et par y_2 et x_2 pour la seconde, il vient

$$N = n_2^2 l (y_2 - x_2),$$
$$g = \frac{4\pi^2 n_1^2}{3} (y_1^3 - x_1^3).$$

Si l'on fait abstraction de l'effet des extrémités, le coefficient d'induction mutuelle aura pour valeur

$$(50)\qquad M = Ng = \frac{4}{3}\pi^2 n_1^2 n_2^2 l(y_2 - x_2)(y_1^3 - x_1^3).$$

Lorsque les couches des deux bobines sont en contact, on peut poser $x_2 = y_1 = y$. Si l'on veut alors disposer du rayon intermédiaire y de manière que le coefficient M soit un maximum, on devra satisfaire à la condition

$$\frac{y_2 - y}{y - x_1} = \frac{y^3 - x_1^3}{3y^2(y - x_1)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x_1}{y} + \frac{x_1^2}{y^2}\right).$$

Comme le dernier membre de cette équation est plus petit que l'unité, la bobine extérieure doit être moins épaisse que la bobine intérieure.

Pour obtenir le coefficient de self-induction d'une bobine, on peut supposer, par exemple, que deux bobines identiques sont superposées et déterminer ce que devient alors leur coefficient d'induction mutuelle (**512**). En faisant ainsi, dans les équations qui précèdent,

$$n_1 = n_2,$$
$$y_1 = y_2 = y,$$
$$x_1 = x_2 = x,$$

on obtient

$$(51)\qquad L = \frac{4}{3}\pi^2 n_1^4 l(y - x)(y^3 - x^3).$$

554. Bobines avec noyau de fer doux. — Supposons que la bobine intérieure renferme un noyau de fer doux cylindrique de rayon a, et dont le coefficient d'aimantation est k. La valeur de N ne change pas ; mais, autant du moins qu'on reste dans les limites entre lesquelles l'aimantation est proportionnelle à la force magnétisante, l'induction magnétique dans l'espace occupé par le fer doux est égale (**379**) à la valeur primitive

de la force multipliée par $1+4\pi k$. La valeur de g devient alors, dans le cas d'un solénoïde,

$$g = 4\pi n_1 (S + 4\pi k \pi a^2) = 4\pi^2 n_1 (r_1^2 + 4\pi k a^2).$$

Si la bobine se compose de plusieurs couches, on a

$$g = 4\pi^2 n_1^2 \int (r_1^2 + 4\pi k a^2) dr_1 = 4\pi^2 n_1^2 \left[\frac{y_1^3 - x_1^3}{3} + 4\pi k a^2 (y_1 - x_1) \right];$$

il en résulte

$$(52) \quad M = \frac{4}{3} \pi^2 n_1^2 n_2^2 l (y_2 - x_2) \left[y_1^3 - x_1^3 + 12\pi k a^2 (y_1 - x_1) \right].$$

Lorsque le noyau de fer remplit la cavité intérieure et que les deux bobines sont en contact, on peut poser

$$a = x_1 = x,$$
$$x_2 = y_1 = y,$$
$$y_2 = z;$$

il vient alors

$$(53) \quad M = \frac{4}{3} \pi^2 n_1^2 n_2^2 l (z - y)(y - x) \left[y^2 + xy + x^2 + 12\pi k x^2 \right].$$

Si le rayon du noyau est seul variable, et qu'on veuille en disposer de manière à rendre maximum le coefficient d'induction mutuelle, la dérivée partielle de M par rapport à x doit être nulle ; il en résulte

$$x = y \frac{8\pi k}{1 + 12\pi k},$$

ou sensiblement $3x = 2y$, puisque le coefficient d'aimantation k est très grand.

Si on se donne le rayon extérieur z, ainsi que le mode d'enroulement des fils, et qu'on veuille disposer de x et de y de

manière à rendre le coefficient M maximum, on trouvera de même, en égalant à zéro les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial M}{\partial y}$,

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$$

Enfin le coefficient de self-induction d'une bobine ayant pour rayon extérieur z, pour rayon intérieur y, et qui renferme un noyau de fer doux de rayon x, aura pour expression

$$(54) \qquad L=\frac{4}{3}\pi^2 n_1^2 l(z-y)^2\left[z^2+zy+y^2+12\pi k x^2\right].$$

Le problème que l'on vient d'étudier est celui qui se présente dans la construction des bobines d'induction.

555. Bobines annulaires. — Dans une bobine formée par l'enroulement régulier d'un fil sur un anneau circulaire, le coefficient g (**196**) devient

$$g=4\pi n_1\int\frac{dS}{x}.$$

Supposons qu'un second fil soit enroulé n' fois d'une manière quelconque autour du premier; le coefficient d'induction mutuelle sera

$$(55) \qquad M=4\pi n_1 n'\int\frac{dS}{x}.$$

Si la première bobine renferme un noyau de fer doux, de révolution autour du même axe et de section S', la valeur de g est alors

$$g=4\pi n_1\left[\int\frac{dS}{x}+4\pi k\int\frac{dS'}{x}\right].$$

Lorsque le noyau remplit la cavité du solénoïde, cette valeur se réduit à

$$g=4\pi n_1(1+4\pi k)\int\frac{dS}{x}.$$

Dans ce cas, le coefficient d'induction mutuelle sur un fil extérieur qui fait n' tours est

$$(56) \qquad M = 4\pi n_1 n'(1 + 4\pi k)\int \frac{dS}{x},$$

et le coefficient de self-induction de la bobine elle-même, qui renferme $2\pi n_1$ spires, est

$$(57) \qquad L = 8\pi^2 n_1^2 (1 + 4\pi k)\int \frac{dS}{x}.$$

Nous avons vu (502) quelles sont les valeurs des intégrales $\int \frac{dS}{x}$ dans certains cas particuliers.

556. Moteurs électriques. — Les *moteurs électriques* sont des machines renfermant des fils conducteurs, des électro-aimants ou des aimants permanents, et combinées de façon que, lorsqu'on y introduit un courant produit par une source étrangère, les actions réciproques électromagnétiques ou électrodynamiques, qui s'exercent entre différents organes, sont utilisées pour provoquer un déplacement relatif de ces organes. La continuité du mouvement est obtenue, soit à l'aide de contacts glissants, soit avec des commutateurs qui modifient la direction du courant dans la machine.

Ces machines pourraient être construites de manière à recevoir un travail uniforme lorsque l'intensité du courant est constante, ce serait le cas de la roue de Faraday (530); mais le plus souvent les actions sont périodiques, et le mouvement relatif des organes, oscillatoire ou rotatif, fait naître à chaque instant une force électromotrice d'induction E de sens contraire à celle E_0 du courant excitateur.

Lorsqu'un régime régulier est établi, le travail des actions réciproques est utilisé uniquement à vaincre des résistances extérieures, puisque la vitesse reprend la même valeur au bout de chaque période.

L'énergie dépensée par la source, pendant chaque période θ, est égale au travail extérieur augmenté de l'énergie qui correspond à l'échauffement des conducteurs. Si l'on appelle R

la résistance du circuit, on a donc

$$\int_0^\theta E_0 I dt = \int_0^\theta I^2 R dt + \int_0^\theta E I dt. \qquad (58)$$

Dans le cas général, les valeurs des intégrales dépendent de la loi suivant laquelle varie le courant pendant la durée d'une période ; mais, si l'intensité est sensiblement constante, l'équation (58) se réduit à

$$(E_0 - E) = IR. \qquad (59)$$

Le rendement ρ d'un pareil moteur est le quotient du travail extérieur EI, pendant l'unité de temps, par l'énergie totale dépensée $E_0 I$, ou le rapport $\frac{E}{E_0}$ de forces électromotrices. En désignant par I_0 l'intensité du courant que produirait dans le circuit en repos la force électromotrice E_0, on a donc

$$\rho = \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{IR}{E_0} = 1 - \frac{I}{I_0}. \qquad (60)$$

Le travail extérieur lui-même a pour expression

$$EI = \frac{E(E_0 - E)}{R} = RI(I_0 - I). \qquad (61)$$

Si la force électromotrice extérieure est constante, ce travail est maximum lorsque le mouvement réduit de moitié l'intensité du courant, et le rendement est alors égal à 0,50.

Si le travail extérieur est très faible, la vitesse du moteur croît très rapidement, avec ou sans limite, suivant le mode de construction ; la force électromotrice d'induction tend à devenir égale à la force électromotrice extérieure et le rendement tend vers l'unité.

557. Électromoteurs. — Lorsqu'un moteur électrique est mis en mouvement par une machine étrangère, il devient le siège d'une force électromotrice de signe contraire à celle

qui produirait le mouvement et le circuit qui le constitue, s'il est fermé, est en général parcouru par un courant électrique. L'appareil devient alors un producteur d'électricité, ou un *électromoteur*.

Supposons que, pour une cause temporaire quelconque, il existe dans le circuit un courant d'intensité i ; si le travail Ei, absorbé par la force électromotrice d'induction, est supérieur à l'énergie calorifique dégagée dans les conducteurs, le courant ira croissant jusqu'à ce que l'on ait

$$EI = I^2R. \tag{62}$$

Si la condition $E > iR$ est satisfaite pour un courant infiniment petit, la machine, une fois en mouvement, s'amorcera d'elle-même et donnera pour le régime régulier un courant déterminé par l'équation précédente (62). Lorsque l'on a, au contraire, $E < iR$ pour un courant infiniment petit, le travail extérieur ne peut faire naître et maintenir un courant électrique, à moins que l'on n'introduise d'une manière artificielle dans le circuit un courant d'intensité telle que la condition $E \geqq iR$ soit réalisée, après quoi la force électromotrice étrangère pourra être supprimée, sans que le courant cesse de se maintenir.

Une machine employée comme électromoteur pourra donc être capable ou non de créer un courant électrique ou d'entretenir un courant déjà établi, suivant la valeur de la résistance totale, ou, ce qui produit un effet analogue, suivant la nature du travail extérieur que l'on veut faire produire au courant. Comme la force électromotrice d'induction, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnelle à la vitesse de la machine, on voit que, pour une résistance totale et un travail extérieur donnés, l'électromoteur sera d'autant plus facilement capable de produire et d'entretenir un courant que sa vitesse sera plus grande.

Considérons deux cas extrêmes :

1° Si une machine est composée d'aimants permanents qui produisent un champ magnétique invariable dans lequel se meuvent des fils conducteurs, comme serait la roue de

Faraday, par exemple, la force électromotrice est simplement proportionnelle au nombre n de tours ou d'oscillations de la machine, pendant l'unité de temps, et peut être représentée par nE_1. A vitesse constante, une pareille machine se comporte exactement comme une pile ordinaire. Elle est toujours capable de produire un courant dans un circuit métallique, puisque la condition $E > iR$ a toujours lieu lorsque le couran est très faible.

2° Si la machine est composée de fils fixes et de fils mobiles (ou de deux systèmes d'électro-aimants, pourvu qu'on reste entre les limites dans lesquelles l'aimantation est proportionnelle à la force magnétisante), la force électromotrice E est proportionnelle à l'intensité du courant et peut être représentée par nAI. Une machine de cette nature ne peut produire et entretenir un courant, que si la vitesse est assez grande pour qu'on ait $nA > R$. Pour toute valeur de n supérieure à $\frac{R}{A}$, l'intensité du courant augmente rapidement jusqu'à ce que la résistance du circuit, par suite de la chaleur dégagée, ait atteint la valeur nA.

Supposons que le courant ait à vaincre à l'extérieur une force électromotrice E'.

Le rendement de l'appareil, comme dans le cas d'une pile, a pour valeur

$$\rho = \frac{E'}{E} = 1 - \frac{IR}{E},$$

et le travail utilisé pendant l'unité de temps est

$$E'I = \frac{E'(E-E')}{R}.$$

Le rendement est encore d'autant plus voisin de l'unité que le courant est plus faible, mais on ne peut plus dire, pour une machine quelconque, dans quelles conditions le travail utile sera maximum.

Si le travail extérieur n'est autre que la mise en mouvement d'une seconde machine identique à la première, les forces

électromotrices E et E' sont proportionnelles aux nombres de tours n et n' des deux machines et à une même fonction $\varphi(\mathrm{I})$ de l'intensité. Le rendement

$$\rho = \frac{n'\varphi(\mathrm{I})}{n\varphi(\mathrm{I})} = \frac{n'}{n}$$

est égal au rapport des vitesses des deux machines, et le travail utile pendant l'unité de temps a pour expression

$$\mathrm{E'I} = \frac{n'(n-n')}{\mathrm{R}}\varphi^2(\mathrm{I}).$$

L'intensité I étant une fonction de $n-n'$, le travail utile maximum ne peut être déterminé que si l'on connaît la forme de la fonction φ.

558. — L'étude particulière des différentes machines dépend de la loi suivant laquelle la force électromotrice est liée à l'intensité du courant.

Dans les machines à électro-aimants, par exemple, l'aimantation est d'abord proportionnelle à l'intensité du courant, et tend ensuite vers une limite maximum. La force électromotrice d'induction E est aussi proportionnelle à l'intensité du courant pour les courants faibles et tend vers une valeur maximum.

Lorsque l'intensité du courant est voisine de celle qui donne le maximum d'aimantation, la force électromotrice est sensiblement constante et le rendement de la machine employée comme moteur est encore égal à 0,50 quand le travail utile est maximum.

Toutefois, le problème des électromoteurs est en réalité moins simple, même lorsque le sens des courants ne change pas, soit par le jeu naturel de la machine, soit que par un commutateur on redresse les courants dans le circuit extérieur. Il y a presque toujours des oscillations périodiques de l'intensité dont on ne peut pas négliger l'influence.

La difficulté est encore plus grande quand on utilise direc-

tement les courants alternatifs que produisent certains types de machines. Nous y reviendrons avec plus de détails dans la seconde partie de cet ouvrage.

559. Application à l'étude du magnétisme. — Nous sommes maintenant en mesure de justifier la méthode indiquée au n° 417 pour étudier la distribution du magnétisme, méthode employée dans les expériences de van Rees et de Gaugain.

Quand on entoure, en un point, un barreau aimanté par une bobine formée d'un nombre n' de spires reliée à un galvanomètre, et qu'on fait brusquement glisser cette bobine d'une certaine quantité parallèlement au barreau, en la laissant en repos dans sa nouvelle position, il passe dans le fil une certaine quantité m d'électricité; si R est la résistance totale du circuit, l'expression $\frac{mR}{n'}$ est égale au flux de force magnétique qui sort de l'aimant entre les deux positions de la bobine. En opérant par déplacements successifs, on peut déterminer la loi de variation du flux de force latéral.

Si la bobine est située d'abord au milieu de l'aimant, ou plus exactement au point neutre, et qu'on l'éloigne brusquement jusqu'à une grande distance, on obtiendra le flux total de force magnétique qui émane de l'aimant et, par suite, la masse totale du magnétisme libre contenu dans la portion correspondante du barreau.

Si la bobine auxiliaire entoure ainsi, soit le milieu d'une longue bobine cylindrique qui renferme un morceau de fer doux, soit un point quelconque d'une bobine annulaire, on peut, à un moment donné, établir ou supprimer brusquement un courant d'intensité connue I dans la bobine aimantante. L'expression $\frac{mR}{n'}$, qui correspond dans le circuit induit à la rupture ou à l'établissement du courant principal, représentera le flux total LI d'induction magnétique qui traverse l'une des spires.

On pourra donc déterminer, par expérience, la valeur de L et en déduire, particulièrement par les formules (53) et (56), le coefficient d'aimantation k. Tel est le principe de la méthode employée récemment par M. Rowland.

560. Hypothèses de Weber sur le magnétisme et le diamagnétisme. — On a vu plus haut (498) comment Ampère explique le magnétisme par les courants moléculaires ; nous pouvons examiner maintenant quelles sont les propriétés physiques de ces courants.

Considérons un de ces courants défini par les valeurs L, I et R, et soit Q le flux de force extérieure qu'il renferme dans son contour ; l'équation (10) du n° 518 devient, puisque la force électromotrice est nulle,

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{LI}+\mathrm{Q})+\mathrm{RI}=0.$$

On doit admettre également que la résistance est nulle ; il en résulte

$$\mathrm{LI}+\mathrm{Q}=\mathrm{C}^{te}=\mathrm{LI}_0. \tag{63}$$

L'intensité I_0 est celle du courant qui parcourrait le circuit considéré, si le flux de force extérieure était nul. Si l'on suppose $I_0=0$, c'est-à-dire le courant moléculaire primitivement nul, ce qui correspondrait au cas d'un milieu magnétique à l'état neutre, on a finalement

$$\mathrm{LI}=-\mathrm{Q}.$$

Le courant induit dans la molécule par un champ extérieur produit donc un flux de force de signe contraire à Q. En d'autres termes, l'aimantation équivalente au courant est de signe contraire à la force magnétisante : l'aimantation des corps magnétiques ne peut donc pas s'expliquer uniquement par les courants induits dans les molécules du milieu.

561. — Ces courants peuvent, au contraire, rendre compte des phénomènes diamagnétiques. L'hypothèse de Weber consiste à admettre qu'il y a dans chaque molécule d'un milieu diamagnétique des canaux le long desquels des courants peuvent se propager sans résistance. Si ces canaux existaient dans toutes les directions, la molécule serait un conducteur

parfait. Pour un courant linéaire primitivement nul, l'intensité est donnée par l'équation (63). En appelant θ l'angle que fait la force magnétisante X avec la normale au plan du circuit, on a

$$Q = XA\cos\theta.$$

Le moment magnétique du courant est IA et sa projection sur la direction de la force magnétisante est

$$IA\cos\theta = -\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta.$$

Supposons qu'il y ait n molécules par unité de volume, et que les axes des circuits soient distribués indifféremment dans toutes les directions. La zone qui correspond à l'angle $d\theta$ autour de la direction de la force magnétisante est $2\pi\sin\theta d\theta$, de sorte que la valeur moyenne de $\cos^2\theta$ est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{3}.$$

Le moment magnétique est donc $-\frac{n}{3}\frac{A^2}{L}X$; l'aimantation est directement opposée à la force magnétisante, ce qui est conforme aux phénomènes de diamagnétisme, et le coefficient d'aimantation a pour valeur

$$k = -\frac{n}{3}\frac{A^2}{L}.$$

Si les axes des canaux moléculaires ont une distribution systématique non uniforme, la somme $\Sigma\frac{A^2}{L}\cos^2\theta$ étendue à toutes les molécules aura des valeurs différentes, suivant la direction de la force magnétisante, et on retrouvera les propriétés connues des corps anisotropes diamagnétiques.

862. — Supposons que chaque molécule soit un conducteur parfait ou, ce qui revient au même, qu'elle soit entourée par une couche d'une conductibilité absolue.

Pour un circuit quelconque tracé sur cette surface, le flux total d'induction magnétique $LI + Q$ qui traverse ce circuit est constant.

Il en résulte que la composante normale de la force en chaque point de la surface est constante. Si le flux d'induction qui sort de la molécule est primitivement nul, tout système magnétique extérieur produira des courants induits tels que l'induction magnétique résultante restera nulle sur toute la surface et dans l'intérieur de la couche qui enveloppe la molécule.

Supposons que la molécule ait la forme d'une sphère de rayon r, les courants superficiels produisent à l'intérieur une force $-X$ égale et de signe contraire à la force magnétique extérieure; la sphère est aimantée uniformément, avec une intensité (**355**) égale à $-\frac{3X}{8\pi}$, et son moment magnétique a pour valeur $-\frac{1}{2}r^3X$.

Si l'on imagine qu'il y ait dans l'unité de volume n sphères pareilles, assez petites et assez éloignées pour ne pas réagir les unes sur les autres, l'intensité d'aimantation moyenne du milieu sera $-\frac{n}{2}r^3X = \frac{-3hX}{8\pi}$, en appelant h le rapport de la somme des volumes des petites sphères au volume total de l'espace qui les renferme.

563. Écrans conducteurs absolus. — Il est évident que ces conséquences de la formule (63) s'appliqueraient également à une surface d'étendue finie qui jouirait d'un pouvoir conducteur absolu : les courants induits que ferait naître dans cette surface une variation quelconque du champ, seraient toujours tels que le flux relatif à chacune des portions de la surface resterait constant, autrement dit que la composante normale de l'induction magnétique en chaque point garderait une valeur fixe. Si donc, à un instant donné, cette composante était nulle, elle resterait nulle quelles que fussent les variations du champ. Il en résulte qu'une surface fermée ou indéfinie, de résistance nulle, est un écran absolu pour tous les points intérieurs contre les effets de la variation du champ de

l'autre côté de la surface; ces effets se réduisent à la production de courants superficiels qui maintiennent constamment nul le champ intérieur.

Autour d'un conducteur parfait la distribution des forces magnétiques est entièrement comparable à la distribution des vitesses dans un fluide incompressible qui entourerait le même corps.

564. Pour expliquer dans le même ordre d'idées les phénomènes magnétiques, il faut admettre que le courant primitif dans une molécule ou autour d'un canal conducteur n'est pas nul, et prendre l'équation générale (63). En considérant toujours un circuit dont la normale fait un angle θ avec la direction de la force magnétisante, on aura

$$LI + XA\cos\theta = LI_0,$$

ou

$$I = I_0 - \frac{XA}{L}\cos\theta.$$

Si le courant primitif I_0 était nul, le moment de l'action du champ sur la molécule serait

$$-IAX\sin\theta = \frac{X^2A^2}{L}\sin\theta\cos\theta = \frac{X^2A^2}{2L}\sin^2\theta.$$

Il y aurait équilibre stable pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand le plan du courant serait perpendiculaire à la direction du champ. Tel est le cas, par exemple, d'un anneau que l'on introduit brusquement dans un champ magnétique très intense.

Dans le cas général, le moment du couple qui agit sur la molécule peut s'écrire

$$\frac{X^2A^2}{L}\cos\theta\sin\theta - I_0AX\sin\theta = mX\sin\theta\,[BX\cos\theta - 1],$$

en posant $m = I_0A$ et $B = LI_0$.

En admettant encore, avec Weber (**427**), que la réaction du

milieu est constante en grandeur et en direction, on aura l'équation d'équilibre

$$X \sin\theta(1 - BX\cos\theta) = D\sin(\alpha - \theta).$$

La composante, parallèle à la force magnétisante X, du moment magnétique de la molécule est

$$IA\cos\theta = \left(I_0 = \frac{XA}{L}\cos\theta\right)A\cos\theta = m\cos\theta(1 - BX\cos\theta).$$

Si le coefficient B est très petit, c'est-à-dire si le courant moléculaire primitif I_0 est très intense, on retrouve la formule de Weber pour l'aimantation des corps magnétiques. Si ce coefficient B est très grand, on obtient les phénomènes de diamagnétisme.

Dans les cas intermédiaires, l'aimantation serait d'abord proportionnelle à la force magnétisante pour des forces faibles, puis passerait par un maximum et irait ensuite en décroissant. L'expérience ne semble indiquer aucun phénomène de cette nature, de sorte que l'intervention des courants d'induction moléculaires ne peut pas encore être considérée comme absolument démontrée.

CHAPITRE SIXIÈME

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

565. Théorie de Maxwell. — Les considérations qui précèdent suffisent, comme on l'a vu, pour rendre compte de tous les phénomènes d'induction dans les conducteurs linéaires; mais il est utile d'envisager le problème d'un autre point de vue, qui permettra de mettre en relief l'intervention du milieu, comme on l'a fait déjà en électrostatique. Nous exposerons ici les principes de la théorie de Maxwell.

566. Équations du champ magnétique. — Supposons, pour plus de généralité, que les conducteurs soient situés dans un milieu magnétique dont le coefficient de perméabilité (**383**) soit égal à μ. Lorsqu'on annule le flux total d'induction magnétique Q qui traverse un circuit fermé, celui-ci devient le siège d'une force électromotrice totale qui met en mouvement une quantité d'électricité égale à $\frac{Q}{R}$.

Cette force électromotrice totale peut être considérée comme la résultante de forces électromotrices élémentaires agissant sur chacun des éléments du circuit, et provenant de l'état du milieu. En chaque point, la réaction élastique du milieu due à la suppression des forces a une direction déterminée; elle produirait sur un élément de conducteur ds, situé dans la même direction, une force électromotrice proportionnelle à la longueur de cet élément et qui peut être représentée par $J ds$; sur un élément qui ferait l'angle ε avec sa direction, la force électromotrice serait égale à $J ds \cos \varepsilon$.

Si le milieu est homogène et isotrope, la force électromotrice J par unité de longueur est une fonction des coordonnées; elle peut être remplacée par ses composantes F, G et H parallèles aux axes, qui donneront sur les projections dx, dy et dz de l'élément ds les forces électromotrices $F\,dx$, $G\,dy$ et $H\,dz$. On aura donc l'équation

$$(1) \qquad Q=\int J\,ds\cos\varepsilon=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

l'intégrale étant étendue à tout le circuit.

D'un autre côté, si l'on considère une surface quelconque S terminée au circuit, et qu'on désigne par X, Y et Z les composantes de la force magnétique en un point de la surface, et par α, β et γ les cosinus des angles de cette force avec la normale, le flux total d'induction magnétique qui traverse le circuit est aussi exprimé par l'intégrale $\mu\int(X\alpha+Y\beta+Z\gamma)\,dS$ étendue à toute la surface.

567. — Pour déterminer les relations qui existent entre la force électromotrice J et l'induction magnétique, nous calculerons la valeur de l'intégrale $\int J\,ds\cos\varepsilon$ pour un circuit rectangulaire infiniment petit, ayant son centre à l'origine des coordonnées, perpendiculaire à l'axe des x, et dont les côtés sont égaux à dy et dz.

Soient F_0, G_0, H_0, les valeurs des fonctions F, G, H à l'origine; on aura, pour le côté supérieur du rectangle,

$$G_1=G_0+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}dz;$$

et, pour le côté inférieur,

$$G_2=G_0-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}dz.$$

Si l'on suit le contour dans le sens où le courant tend à se produire par la suppression du champ, la somme des deux

termes de la force électromotrice correspondant aux côtés parallèles à l'axe des y est $G_1\,dy - G_2\,dy$; on obtient ainsi

$$G_1\,dy - G_2\,dy = \frac{\partial G}{\partial z}\,dz\,dy.$$

On aurait, de même, pour les deux autres côtés,

$$-H_1\,dz + H_2\,dz = -\frac{\partial H}{\partial y}\,dy\,dz.$$

La force électromotrice relative au contour est donc

$$\int J\,ds\cos\varepsilon = \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)dy\,dz.$$

D'autre part, cette expression doit représenter aussi le flux d'induction magnétique qui traverse le circuit $dy\,dz$ en entrant par la face négative; comme ce flux a pour expression $\mu X\,dy\,dz$, la composante μX est égale à $\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}$.

Les autres composantes de l'induction magnétique, parallèles à l'axe des y et à l'axe des z, satisferaient à des conditions analogues, ce qui donne les équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \mu Y &= \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \\ \mu Z &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant un circuit fermé quelconque; nous pouvons diviser sa surface en éléments par deux séries de courbes arbitraires. Si on fait la somme $\int J\,ds\cos\varepsilon$ des forces électromotrices en suivant le contour de tous les éléments, on obtiendra le flux total d'induction magnétique qui traverse le circuit, et cette somme se réduira aux seuls termes fournis par

le contour primitif, puisque les portions de courbe communes à deux éléments contigus donnent une somme nulle. La force électromotrice totale d'un circuit ne dépend donc que des valeurs des composantes F, G et H aux différents points du contour, et ces composantes sont liées à l'induction magnétique par les équations (2).

598. — Remarquons que la composante F représente, en un point donné, et pour l'unité de longueur parallèle à l'axe des x, la force électromotrice totale qui correspondrait à la suppression du champ. Cette force électromotrice peut aussi être considérée comme l'intégrale, par rapport au temps, des forces électromotrices élémentaires correspondant à la suppression graduelle du champ. Le produit de la force électromotrice P, qui agit à un instant donné sur l'unité de longueur parallèle à l'axe de x, par le temps dt est égal à la diminution correspondante de la valeur de F, ce qui donne

$$Pdt = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\,dt,$$

ou

$$P = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}.$$

En appelant, de même, Q et R les composantes analogues suivant les autres axes, on aura, pour déterminer la force électromotrice à chaque instant, les trois équations

$$(3)\qquad \begin{aligned} P &= -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}, \\ Q &= -\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}, \\ R &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

La fonction $-P$ exprime la différence de potentiel qui se produit en un point, à l'instant considéré, entre les deux extrémités d'une longueur égale à l'unité parallèle à l'axe de x, en vertu des variations qui ont lieu en même temps dans la valeur du flux d'induction magnétique.

S'il existait aussi des masses électrisées donnant au même point un potentiel ψ, la différence totale de potentiel pour un élément dx serait égale à $\frac{\partial F}{\partial t}dx - \frac{\partial \psi}{\partial x}dx$; mais cette dernière partie est une différentielle exacte qui disparaît d'elle-même quand on applique la formule à un circuit fermé.

569. Équations des courants. — Soient u, v, w les composantes du courant en un point, c'est-à-dire les quantités d'électricité qui traversent respectivement, pendant l'unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à chacun des axes.

On sait que le travail d'un courant I sur un pôle égal à l'unité, mobile sur une courbe fermée qui traverse le plan d'un courant (**452**), est égal à $4\pi I$ pour chaque révolution complète du pôle autour du courant.

Si l'on applique cette propriété au cas d'un pôle qui parcourt un circuit rectangulaire $dydz$ dont le milieu est situé à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire qui renferme une surface à travers laquelle l'intensité du courant est $udydz$, et qu'on évalue le même travail par les forces magnétiques, on trouve, par un calcul analogue à celui qui a été appliqué au n° **567**, les trois nouvelles équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned}$$

570. Énergie potentielle des courants. — Considérons différents circuits $C_1, C_2, C_3, ..$ dans lesquels les intensités des courants sont I_1, I_2, $I_3, ..$; soient L_1, L_2, $L_3, ...$ leurs coefficients de self-induction, et $M_{1.2}$, $M_{1.3}$, $M_{2.3}, ..$, leurs coefficients d'induction mutuelle.

Les flux de force qui traversent chaque circuit sont

$$\begin{aligned} Q_1 &= L_1I_1 + M_{1.2}I_2 + M_{1.3}I_3 + \cdots\cdots, \\ Q_2 &= L_2I_2 + M_{2.1}I_1 + M_{2.3}I_3 + \cdots\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle de l'ensemble des courants (521) est

$$(5) \qquad W=\frac{1}{2}(Q_1I_1+Q_2I_2+\ldots\ldots)=\frac{1}{2}\Sigma QI.$$

D'après l'équation (1), on a donc

$$W=\frac{1}{2}\Sigma I\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Le courant qui traverse la section S de l'un des conducteurs a pour composantes, en donnant à u, v et w la même signification que plus haut (569),

$$I\frac{dx}{ds}=uS,$$
$$I\frac{dy}{ds}=vS,$$
$$I\frac{dz}{ds}=wS.$$

Si l'on remarque, en outre, que le produit $S\,ds$ représente un élément de volume, on aura

$$W=\frac{1}{2}\iiint(Fu+Gv+Hw)\,dx\,dy\,dz.$$

Remplaçant enfin les composantes u, v, w par leurs valeurs tirées des équations (4), on obtient

$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint\left[F\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

On peut intégrer par parties chacun des termes, ce qui donne, par exemple,

$$\int F\frac{\partial Y}{\partial z}dx\,dy\,dz=FY\,dx\,dy-\int Y\frac{\partial F}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

En répétant la même opération pour tous les autres termes, il vient

$$W = \frac{1}{8\pi}\iint \left[X(H dz - G dy)\,dx + Y(F dx - H dz)\,dy + \ldots\right]$$

$$+\frac{1}{8\pi}\iiint \left[X\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\right)\right] dx\,dy\,dz.$$

Si l'on étend cette expression à tout l'espace renfermé dans une surface très éloignée qui comprend le système total des aimants et des courants, la première intégrale, relative à la surface même, est nulle, puisque les composantes de la force magnétique sont en raison inverse du cube de la distance. D'autre part, en remplaçant dans la seconde intégrale les termes compris entre parenthèses par leurs valeurs tirées des équations (2), on obtient

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\iiint (X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

ou, en appelant φ l'induction magnétique en un point, c'est-à-dire le produit de la force par μ,

$$(6) \qquad W = \frac{1}{8\pi\mu}\iiint \varphi^2\,dx\,dy\,dz.$$

L'énergie potentielle des courants peut donc être exprimée par une intégrale (5) qui renferme les courants eux-mêmes, ou par une intégrale (6) relative à toutes les parties de l'espace dans lequel existent des forces magnétiques. Dans le premier cas, l'action réciproque des courants est considérée comme s'exerçant directement à distance ; dans le second cas, cette action résulte de l'élasticité du milieu intermédiaire. Si l'on adopte cette manière de voir, on voit que l'énergie potentielle du milieu en chaque point, par unité de volume, a pour expression

$$(7) \qquad W_1 = \frac{1}{8\pi\mu}\varphi^2.$$

571. Déplacement relatif des circuits. — Les formules (3) correspondent au cas où, le circuit étant immobile, l'induction est due aux seules variations du champ; alors les quantités F, G et H sont en chaque point seulement des fonctions du temps. Mais si, tout en laissant le champ variable, on déplace ou on déforme le circuit, les coordonnées x, y, z doivent être considérées elles-mêmes comme des fonctions du temps. L'équation (1) doit s'écrire alors

$$(8)\qquad Q=\int\left(F\frac{\partial x}{\partial s}+G\frac{\partial y}{\partial s}+H\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds.$$

La force électromotrice utilisée pendant le temps dt est $-dQ$, de sorte que la force électromotrice d'induction e, à un instant donné, a pour expression

$$(9)\qquad \begin{aligned} e=-\frac{dQ}{dt}=&-\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds\\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial t}ds\\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial z}{\partial t}ds\\ &-\int\left(F\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+G\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}+H\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\right)ds\\ &-\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds. \end{aligned}$$

Considérons le premier terme de l'intégrale, et substituons aux dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial H}{\partial x}$ leurs valeurs tirées des équations (2); ce terme devient

$$\int\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial s}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds,$$

ou

$$\int\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial s}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial t}ds.$$

On obtiendra des résultats analogues en opérant de même pour le deuxième et le troisième termes. Remarquons, en outre, que l'on a

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+F\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}\right)ds=F\frac{\partial x}{\partial t},$$

et que les groupes de cette forme disparaissent quand on étend l'intégrale à un contour fermé.

La valeur de la force électromotrice se réduit donc à

$$e=\int\left[\left(\mu Y\frac{\partial z}{\partial t}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\left(\mu Z\frac{\partial x}{\partial t}-\mu X\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\ldots\right]ds.$$

Chacun des trois groupes que renferme la parenthèse représente la force électromotrice qui agit à un instant donné sur l'unité de longueur parallèle à l'un des axes. Si on suppose, en outre, que le champ renferme des masses électriques donnant un potentiel ψ, les valeurs les plus générales des composantes P', Q', R' de la force électromotrice seront

$$(10)\qquad \begin{aligned} P'&=\mu Y\frac{\partial z}{\partial t}-\mu Z\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x},\\ Q'&=\mu Z\frac{\partial x}{\partial t}-\mu X\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ R'&=\mu X\frac{\partial y}{\partial t}-\mu Y\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial z}.\end{aligned}$$

572. Équations du champ électrique. — Considérons enfin, d'une manière plus générale, un champ isotrope dans lequel peuvent exister en même temps des courants continus et des courants qui correspondent à une variation du déplacement électrique (**126**).

Si on appelle f, g, h les composantes du déplacement électrique, les quantités réelles d'électricité u', v', w', qui traversent respectivement, pendant l'unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire aux axes, se composent des courants

continus u, v, w (509) et des variations du déplacement électrique. On a alors

$$(11) \qquad \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial f}{\partial t}, \\ v' &= v + \frac{\partial g}{\partial t}, \\ w' &= w + \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

Les équations des courants (4) deviennent

$$(12) \qquad \begin{aligned} 4\pi u' &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ 4\pi v' &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\ 4\pi w' &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Lorsque le milieu est diélectrique, il s'établit un équilibre entre la force électromotrice, dont les composantes sont données par l'équation (10), et les réactions élastiques développées par le déplacement. Si on représente par $\frac{4\pi}{K}$ la valeur, en unités électromagnétiques, du coefficient d'élasticité électrique, c'est-à-dire le rapport de la force électromotrice au déplacement, on aura

$$(13) \qquad \begin{aligned} KP &= 4\pi f, \\ KQ &= 4\pi g, \\ KR &= 4\pi h. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit, au contraire, d'un corps conducteur, le déplacement est nul et, si on désigne par c la conductibilité spécifique du milieu, la loi d'Ohm donne

$$(14) \qquad \begin{aligned} Pc &= u, \\ Qc &= v, \\ Rc &= w. \end{aligned}$$

Enfin, si on appelle ρ la densité de l'électricité libre au point considéré, on aura, dans le cas d'un diélectrique, la condition

$$(15) \qquad \rho + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

et, dans le cas d'un conducteur,

$$(16) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les vingt équations comprises sous les n[os] (2), (10), (11), (12), (13), (14), (15) et (16) permettront de déterminer les vingt quantités: F, G, H; P, Q, R; X, Y, Z; u, v, w; f, g, h; u', v', w'; ρ et ψ, quand on connaîtra dans chaque cas particulier les conditions du problème.

CHAPITRE SEPTIÈME

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION DANS LES CONDUCTEURS NON LINÉAIRES

573. Magnétisme de rotation. — A la suite d'une observation de Gambey sur l'amortissement des oscillations d'une boussole, Arago a montré en 1824 qu'une aiguille aimantée, placée au-dessus d'un disque métallique animé d'un mouvement de rotation, est entraînée par le disque et tend à prendre une rotation de même sens.

L'action qui s'exerce sur un pôle magnétique dans ces conditions a trois composantes : l'une tangentielle qui entraîne le pôle dans le sens du mouvement, une autre normale qui tend à l'éloigner du disque, enfin une troisième dirigée suivant le rayon. Cette dernière est nulle quand le pôle est à une distance de l'axe égale environ aux deux tiers du rayon du disque ; plus près de l'axe, le pôle est attiré vers le centre ; plus près des bords, il semble repoussé vers le bord.

L'entraînement de l'aiguille est plus marqué avec un métal bon conducteur comme le cuivre, qu'avec un métal moins conducteur, comme le laiton et surtout l'antimoine. Quand on produit une interruption dans la continuité du disque, par exemple avec des traits de scie suivant les rayons, on voit diminuer très notablement l'effet produit.

Ces phénomènes ont été attribués d'abord à une forme particulière de magnétisme et désignés sous le nom de *magnétisme de rotation*. Ils sont produits, en réalité, par les courants d'induction développés dans le métal ; mais c'est seulement après la grande découverte de Faraday qu'ils ont été rapportés à leur véritable cause.

574. Feuillets conducteurs. — Le problème soulevé par l'expérience d'Arago est celui de l'induction dans un conducteur à deux dimensions. Maxwell a résolu ce problème d'une manière très élégante, en employant une méthode analogue à celle des images électriques.

Considérons un conducteur homogène infiniment mince, qu'on pourra supposer réduit à une surface, et dans lequel existent, pour une cause quelconque, des courants qui ne sont point amenés de l'extérieur par des électrodes. Ces courants sont nécessairement fermés sur eux-mêmes, et les lignes de courant ne peuvent se couper entre elles. L'espace annulaire compris entre deux lignes de courant infiniment voisines peut être considéré comme un conducteur linéaire parcouru par un courant d'intensité $d\Phi$. Ce courant peut être remplacé par un feuillet de même puissance et de même contour.

Si l'on décompose ainsi la surface du conducteur en bandes infiniment minces par des lignes de courant, on voit que, pour un point extérieur, l'ensemble des courants sera équivalent un feuillet complexe (**333**), dont la puissance magnétique Φ en chaque point est égale à la somme de celles des feuillets superposés. Sur la face positive du feuillet, les courants tournent en sens inverse des aiguilles d'une montre autour des régions où la valeur de Φ est maximum. Cette valeur est d'ailleurs nulle sur le contour, si la lame est limitée.

Le long d'une ligne de courant, la valeur de Φ est constante; les lignes de courant sont les lignes de niveau de la fonction Φ. Un élément dn d'une orthogonale n aux lignes de courant est coupé normalement par un courant d'intensité $\frac{d\Phi}{dn}dn$, dirigé à droite d'un observateur qui, en suivant cette ligne, marcherait vers les points où la fonction Φ est croissante. Enfin un élément ds' d'une courbe quelconque est coupé par un courant d'intensité $\frac{\partial\Phi}{\partial s'}ds'$, mais qui n'est plus normal.

Le potentiel magnétique du feuillet à l'extérieur a pour expression

$$V = \int \Phi d\omega.$$

Cette fonction est discontinue quand on traverse la surface : les deux valeurs V_2 et V_1 qu'elle prend de part et d'autre du feuillet, sur la face positive et sur la face négative (330), sont liées par la relation

$$V_2 - V_1 = 4\pi\Phi.$$

La composante de la force magnétique normale à la surface est continue, car elle représente, de part et d'autre, le flux d'induction magnétique par unité de surface. Il en est de même pour la composante tangentielle suivant une ligne de courant, puisqu'on a alors $\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0$.

Au contraire, la composante tangentielle suivant une orthogonale aux lignes de courant est discontinue, et on a, de part et d'autre de la surface,

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial n} + 4\pi\frac{d\Phi}{dn}.$$

La valeur de V peut être exprimée aussi (360) en fonction du potentiel Q d'une couche qui recouvrirait la même surface et dont la densité serait égale, en chaque point, à la puissance Φ du feuillet.

575. Cas d'un feuillet plan. — Considérons, en particulier, une lame conductrice plane, située dans le plan des xy, et supposons que la face positive des courants soit à la partie supérieure; le potentiel du feuillet magnétique correspondant, en un point dont les coordonnées sont x, y et z, a pour expression (362)

$$(1) \qquad V = -\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

La fonction Q, qui représente le potentiel d'une couche dont la densité serait en chaque point égale à la puissance magnétique du feuillet, est symétrique par rapport au plan des xy et ne change pas quand on remplace z par $-z$. La fonction V, au contraire, change de signe avec z, et sa valeur absolue est

la même en deux points symétriques par rapport au feuillet. On a donc, pour les points correspondants de la face positive et de la face négative,

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
V_2 &= -\frac{\partial Q}{\partial z} = 2\pi\Phi,\\
V_1 &= -\frac{\partial Q}{\partial z} = -2\pi\Phi.
\end{aligned}
$$

Les composantes X et Y de la force magnétique parallèles aux axes sur la face positive, et les valeurs de ces composantes X′ et Y′ sur la face négative, sont données par les équations

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
X &= -\frac{\partial V_2}{\partial x} = -2\pi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -X',\\
Y &= -\frac{\partial V_2}{\partial y} = -2\pi\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -Y'.
\end{aligned}
$$

576. — Examinons maintenant les courants dans la lame. La composante u du courant parallèle à l'axe des x, qui coupe une longueur égale à l'unité parallèle à l'axe des y, est

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

et la composante v du courant parallèle à l'axe des y

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Si on appelle σ la résistance de la lame par unité de surface, la chute de potentiel électrique, pour une longueur égale à l'unité, sera σu parallèlement à l'axe des x, et σv parallèlement à l'axe des y ; cette chute de potentiel n'est autre chose que la force électromotrice suivant les mêmes directions. On a donc, en vertu des expressions trouvées plus haut (**568**) dans le cas d'un champ variable avec le temps,

$$
\begin{aligned}
-\sigma\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial t},\\
\sigma\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\frac{\partial G}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Pour la face positive, les équations (2) donnent

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial z};$$

il en résulte

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z} &= -\frac{\partial F}{\partial t},\\ -\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} &= -\frac{\partial G}{\partial t}. \end{aligned}$$

Les équations générales (567) qui lient les composantes de la force électromotrice totale d'induction avec le potentiel magnétique donnent, dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} &= X = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z},\\ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} &= Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z},\\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} &= Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Ces équations sont satisfaites en posant

$$F = -\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad G = \frac{\partial Q}{\partial x},\qquad H = 0.$$

577. — S'il existe en même temps un système extérieur d'aimants ou de courants, on sait (198) que son action sur une surface qui l'entoure est équivalente à celle d'un ensemble convenable de courants superficiels. Le potentiel magnétique de ce système, à la surface positive du feuillet que nous considérons, pourra donc être exprimé par une fonction Q′ analogue à la fonction Q ; on aura alors

$$V = -\frac{\partial(Q+Q')}{\partial z},$$

ce qui donne

$$F = -\frac{\partial(Q+Q')}{\partial y},\qquad G = \frac{\partial(Q+Q')}{\partial x}.$$

Les équations (4) deviennent, en posant $\frac{\sigma}{2\pi} = R$,

$$(5) \qquad \begin{aligned} R\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 (Q+Q')}{\partial y \partial t}, \\ R\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 (Q+Q')}{\partial x \partial t}. \end{aligned}$$

En intégrant la première par rapport à y, ou la seconde par rapport à x, on obtient

$$(6) \qquad R\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial (Q+Q')}{\partial t}.$$

On devrait ajouter, pour l'intégration complète, une fonction arbitraire de t, mais il faut remarquer que cette fonction disparaîtra toutes les fois que l'on prendra une dérivée partielle par rapport à x ou à y pour calculer les composantes du courant; il n'y a donc pas à en tenir compte.

578. — Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de corps magnétique extérieur, c'est-à-dire que Q' soit nul. Ce serait le cas d'un système de courants établis dans le feuillet et abandonnés à eux-mêmes; ces courants agiraient l'un sur l'autre par leur induction mutuelle et perdraient rapidement leur énergie par l'effet de la résistance du conducteur. L'équation

$$R\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

donne alors

$$(7) \qquad Q = f(x, y, z + Rt).$$

Par suite, la valeur de la fonction Q, à l'époque t, en un point situé à la distance z du plan, du côté de la face positive, et dont les coordonnées sont x, y et z, est la même que pour l'époque $t = 0$ au point x, y et $z + Rt$.

Il en résulte que si un système de courants a été établi dans un plan indéfini et uniforme, et ensuite abandonné à lui-même, l'effet magnétique de ces courants sur un point situé

du côté de la face positive est le même que si le plan se déplaçait parallèlement à lui-même suivant la normale et du côté négatif, avec la vitesse constante R. La diminution de force électromotrice due à l'affaiblissement des courants est exactement représentée par la diminution du champ magnétique qui résulte en chaque point de ce mouvement imaginaire.

579. Images magnétiques. — L'intégrale de l'équation (6) par rapport à t donne, pour les points situés à la surface du feuillet,

(8) $$Q - Q' = \int R \frac{\partial Q}{\partial z} dt.$$

Si nous supposons que, Q et Q' étant d'abord nuls, le système extérieur soit créé subitement du côté positif de manière que le potentiel Q' qui lui correspond passe brusquement de o à Q', on aura alors au début et pour la surface du feuillet, puisque l'intégrale est nulle,

$$Q = -Q'.$$

Ainsi, pour tous les points de la lame et, par suite, pour tous les points situés du côté de la face négative, le système initial des courants produit un effet égal et de signe contraire à celui du système réel placé du côté positif. Leur effet est donc le même que celui d'un système magnétique identique et de signe contraire au système réel, et qui coïnciderait avec lui.

Pour les points situés du côté positif, l'effet des courants est le même que celui d'un système de même signe que le système réel et qui lui serait symétrique par rapport au plan conducteur; nous l'appellerons l'*image positive* du système.

L'action des courants de chaque côté du feuillet peut donc être considérée comme produite par une *image* du système magnétique, positive ou négative, c'est-à-dire de même signe que le système ou de signe contraire, suivant que le point considéré est du côté positif ou négatif du feuillet.

Si la conductibilité du feuillet était infinie, on aurait $R = o$; le second membre de l'équation (8) serait toujours nul et la condition $Q = -Q'$ serait satisfaite à tout instant. La lame serait

un écran absolu (362) pour tous les points situés du côté négatif. Les courants seraient permanents et leur effet représenté à chaque instant pour tous les points de l'espace par celui de l'une ou de l'autre des deux images immobiles.

Dans un feuillet réel, la résistance R a une valeur finie. Les courants produits par l'introduction brusque d'un système magnétique commencent immédiatement à décroître et leur effet, de part et d'autre, est à chaque instant représenté par celui des deux images du système qui s'éloigneraient normalement du feuillet de part et d'autre avec la vitesse R.

580. Induction d'un système magnétique mobile. — Le principe des images permet de déterminer les courants induits par les variations d'un système magnétique quelconque M situé du côté positif du feuillet.

La fonction Q′, qui détermine l'action magnétique, variera de $\frac{\partial Q'}{\partial t}dt$ pendant que le système lui-même variera de $\frac{\partial M}{\partial t}dt$. On peut considérer cette dernière variation comme étant elle-même un système magnétique, et supposer qu'à l'instant t il s'est formé brusquement, du côté négatif du feuillet, une image positive de $\frac{\partial M}{\partial t}dt$, qui s'éloigne ensuite normalement avec une vitesse constante R. Si le système varie d'une manière continue, on imaginera que les différentes images des variations, relatives aux différents intervalles de temps, se meuvent suivant la même loi, dès qu'elles sont formées, et constituent ainsi des traînées continues d'images.

581. — Supposons, par exemple, qu'un pôle positif $+m$ se meuve en ligne droite avec une vitesse constante u, parallèlement au feuillet, et admettons que ce pôle ait été créé brusquement au point A (fig. 120), ce qui donne naissance à une image $+m$ au point symétrique B. Au bout d'un temps infiniment petit δt, le pôle vient en A′ (fig. 121) à la distance $u\delta t$: c'est comme si l'on introduisait brusquement et simultanément un pôle $-m$ en A et un pôle $+m$ en A′, donnant des images de même signe en B et B′ ; mais, à ce moment, la première image $+m$ qui se trouvait en B est venue en C à la distance $R\delta t$. A l'époque $2\delta t$, la masse $+m$ se trouve en A″

(fig. 122): il y a alors deux images égales à $-m$ en C et B′ et trois images positives en B″, C′ et D; et ainsi de suite.

Si le mouvement est continu, on voit que l'action que subit le pôle mobile est celle de deux lignes magnétiques, l'une positive et l'autre négative. En désignant par U la résultante $\sqrt{u^2+R^2}$ des deux vitesses, la densité de ces deux lignes serait $\frac{m}{U\partial t}$ et leur distance $\frac{Ru}{U}\partial t$; le produit de la densité par la distance est donc $m\frac{Ru}{U^2}$. Ces deux lignes forment un ruban indéfini aimanté qui part du point symétrique de la position

Fig. 120 Fig. 121 Fig. 122

actuelle du pôle, est situé dans un plan passant par la trajectoire du pôle, et fait avec le plan du feuillet un angle dont la tangente est égale à $\frac{u}{R}$.

582. — Si le pôle $+m$, au lieu de décrire une ligne droite, est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe perpendiculaire au feuillet, il suffit de supposer que le ruban qui précède forme une hélice sur le cylindre droit qui a pour base la circonférence décrite par le pôle.

Pour un aimant réduit à ses deux pôles et tournant autour de son centre, les courants induits sont aussi équivalents au système de deux rubans magnétiques enroulés sur le même cylindre. Enfin, les courants produits par le déplacement d'un système magnétique quelconque animé d'un mouvement uniforme, sont équivalents à un ensemble de rubans

magnétiques qui correspondent, point par point, aux différentes masses du système.

583. Calcul de l'action des courants induits. — Pour calculer l'effet de ces images, désignons par Q_τ la valeur du potentiel Q, déterminé par les courants du feuillet, au point dont les coordonnées sont $x, y, z+R\tau$, et à l'époque $t-\tau$; par Q'_τ la valeur du potentiel Q', déterminé par le système magnétique, au point $x, y, -(z+R\tau)$, et à la même époque $t-\tau$. Le potentiel Q_τ étant une fonction des coordonnées $x, y, z+R\tau$ et de $t-\tau$, on a

$$(9) \qquad \frac{\partial Q_\tau}{\partial \tau} = R\frac{\partial Q_\tau}{\partial z} - \frac{\partial Q_\tau}{\partial t}.$$

L'équation (6) appliquée à cette fonction devient alors

$$\frac{\partial Q_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial Q'_\tau}{\partial t}.$$

En intégrant cette équation par rapport à τ entre les limites $\tau = 0$ et $\tau = \infty$, on aura la valeur de la fonction Q pour l'époque t, ce qui donne

$$(10) \qquad Q = \int_0^\infty \frac{\partial Q'_\tau}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty Q'_\tau d\tau.$$

La fonction Q dont dépend la solution du problème, puisqu'elle permet de calculer en chaque point l'action des courants induits, est ainsi déterminée par la fonction Q'_τ définie à chaque instant par l'état et le mouvement du système magnétique extérieur.

584. Cas d'un pôle unique. — On peut appliquer ce mode de calcul au cas, considéré plus haut, d'un pôle unique de masse m, qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme en présence d'un plan conducteur indéfini ; mais il est plus simple de traiter le problème directement par la considération des images magnétiques.

Examinons d'abord l'action qu'exerce sur un point A (fig. 123)

une ligne homogène de densité λ située suivant la droite XX'. L'action d'un élément MM' ou ds, à la distance r du point A, est égale à $\frac{\lambda ds}{r^2}$. Désignons par $d\alpha$ l'angle des deux rayons AM et AM', et abaissons les deux perpendiculaires MQ sur AM'

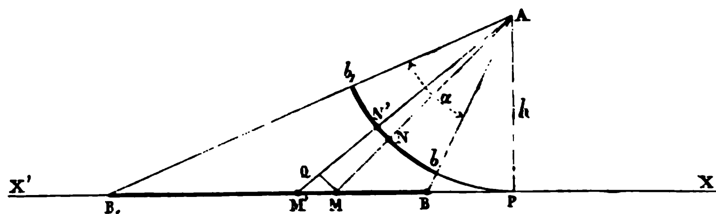


Fig. 123.

et AP ou h sur XX'. On a, par la similitude des triangles APM et MQM', la relation

$$\frac{MQ}{MM'}=\frac{AP}{AM'}, \quad \text{ou} \quad \frac{r d\alpha}{ds}=\frac{h}{r};$$

il en résulte

$$\frac{\lambda ds}{r^2}=\lambda\frac{d\alpha}{h}=\lambda\frac{h d\alpha}{h^2}=\lambda\frac{NN'}{h^2}.$$

L'action de l'élément ds sur le point A est donc égale à celle de l'élément NN' de la circonférence de rayon h qui aurait la même densité λ, ou à celle de l'élément correspondant de la circonférence du rayon 1, où la densité serait $\frac{\lambda}{h}$. Si la ligne considérée est limitée aux points B et B_1, son action est égale à celle de l'arc de cercle bb_1. On voit aisément que cette dernière action f est proportionnelle à la longueur de la corde, ce qui donne

$$f=\frac{\lambda}{h^2}2h\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\lambda}{h}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

583. — Supposons maintenant qu'un pôle mobile, de

masse m, animé d'un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse u, et ayant déjà marché depuis un temps infini avant l'époque que l'on envisage, se trouve au point A, à une distance c du feuillet conducteur X'X (fig. 124), et provienne d'une

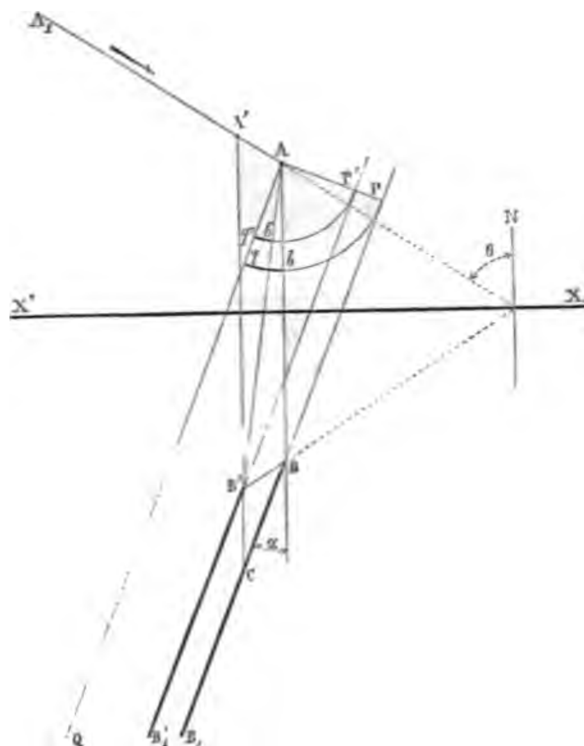


Fig. 124.

direction A_1A telle qu'il n'ait pas encore traversé le feuillet. Soit θ l'angle de cette direction avec la normale N au feuillet.

L'angle α que font avec la normale les traînées magnétiques B'_1B' et B_1B, relatives à deux positions successives A' et A du pôle, est déterminé par le triangle BB'C, qui donne

$$U^2 = R^2 + u^2 + 2Ru\cos\theta,$$
$$\sin\alpha = \frac{u\sin\theta}{U}.$$

[illegible]

$$h' \; h \; R \sin z \, dt = h\left(1 - \frac{R \sin z}{h} dt\right) = [illegible]$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{1}{h'}=\frac{1}{h}\left(1+\frac{R}{2c}\delta t\right).$$

Le triangle ABB′ donne aussi

$$\frac{\alpha-\alpha'}{u\delta t}=\frac{\sin\theta}{2c},$$

ou

$$\alpha'=\alpha-\frac{u\sin\theta}{2c}\delta t=\alpha-\frac{U\sin\alpha}{2c}\delta t.$$

En substituant ces valeurs de h' et de α' dans les expressions des composantes, et négligeant les quantités du second ordre, on obtient

$$Z=\frac{m}{4c^2}\frac{U-R}{U},$$

$$X=-\frac{m}{4c^2}\frac{R}{U}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

La force elle-même fait avec la surface un angle β déterminé par la condition

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{Z}{-X}=\frac{U-R}{R}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

L'action des courants induits s'oppose bien au mouvement du pôle, comme on pouvait le prévoir, mais elle ne lui est pas directement opposée.

Si le mouvement du pôle est normal au feuillet, on $\theta=0$, $\alpha=0$ et $U=R+u$; il vient alors

$$Z=\frac{m}{4c^2}\frac{u}{R+u},$$

$$X=0.$$

L'action est la même que celle d'une masse unique, égale

à $m\frac{u}{R+u}$, située à chaque instant au point B symétrique de la position du pôle, ou d'une masse $\frac{m}{4}\frac{u}{R+u}$ située au pied de la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan.

Si le pôle se déplace parallèlement à la lame, on a

$$U^2 = R^2 + u^2, \qquad \tang\alpha = \frac{u}{R};$$

ce qui donne

$$Z = \frac{m}{4c^2}\frac{u^2}{U(R+U)}, \qquad F = \frac{mu}{4c^2(R+U)},$$
$$X = -\frac{m}{4c^2}\frac{uR}{U(R+U)}, \qquad \tang\beta = \frac{u}{R} = \tang\alpha.$$

La force est donc perpendiculaire à la direction des traînées magnétiques ; elle est la même que s'il existait dans le plan, sur sa direction, une masse égale à $\frac{m}{4}\frac{U^2}{(R+U)u}$.

On peut encore imaginer que la force F est produite par un aimant infiniment petit situé dans le plan. En appliquant, par exemple, les formules de Gauss (121), on trouve que cet aimant est situé en arrière de la projection du pôle, à une distance x donnée par l'équation

$$x = \frac{3cR}{4u}\left(\sqrt{1 + \frac{8u^2}{9R^2}} - 1\right),$$

l'aimantation étant parallèle au sens du mouvement. Le moment de cet aimant serait d'ailleurs facile à calculer.

La composante X est maximum, pour une valeur donnée de R, lorsque l'on a $u = 1,27R$; elle est nulle pour $R = 0$ et pour $R = \infty$.

La composante Z tend à éloigner le pôle de la lame ; elle croît avec la vitesse et tend vers la valeur $\frac{1}{4c^2}$ quand la vitesse tend vers l'infini.

586. — Dans le cas d'un mouvement rectiligne et uniforme

parallèle au plan, on peut encore considérer les phénomènes d'une autre manière.

Le ruban magnétique qui part du point B (fig. 125) est formé de deux lignes magnétiques dont la densité est $\frac{m}{U\delta t}$ et la distance horizontale $u\delta t$.

Désignons par s la distance M'B d'un point quelconque M' et par x' la distance M'K. Pour un élément ds du ruban, le moment magnétique ϖ' est

$$\varpi' = m\frac{u}{V}ds = mds \sin\alpha.$$

Comme on a $x' = s \sin\alpha$, il vient $\varpi' = mdx'$.

L'action sur le point A de cet aimant infiniment petit placé en M', à la distance r', est équivalente à celle d'un aimant infiniment petit de moment ϖ placé en M, à la distance r, et tel qu'on ait

$$\frac{\varpi}{r^3} = \frac{\varpi'}{r'^3} = \frac{mdx'}{r'^3}.$$

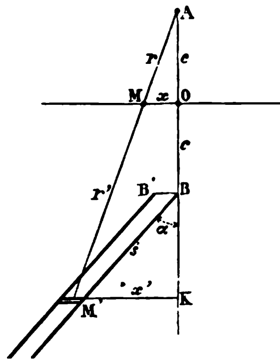


Fig. 125.

En appelant x et c les distances MO et AO, on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{x}{x'} = \frac{c}{2c + x'\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{c - x\operatorname{cotg}\alpha}{2c}.$$

Il en résulte

$$\varpi = \frac{m}{4}\,\frac{c - x\cot\alpha}{c}\,dx.$$

On voit que l'action des courants induits sur le point A est équivalente à celle d'un solénoïde complexe (327) situé sur le plan, partant du point O, dans une direction opposée à celle du mouvement, et dont l'intensité d'aimantation en chaque point serait

$$\frac{\varpi}{dx} = \frac{m}{4}\,\frac{c - x\cot\alpha}{c}.$$

On trouverait ainsi, pour les composantes X et Z de la force, les mêmes valeurs que précédemment.

587. Expérience d'Arago. — Cette méthode peut être généralisée. Supposons que le pôle décrive une circonférence de

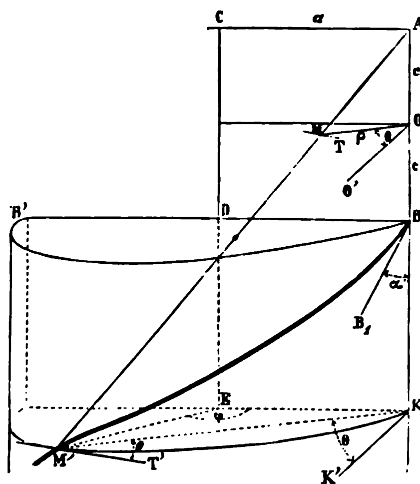


Fig. 126.

rayon a, en sens contraire du mouvement des aiguilles quand on le regarde de la partie supérieure. L'action des courants induits est celle de deux hélices homogènes de signes contraires, ou d'un ruban héliçoïdal BM′ (fig. 126)

enroulé sur un cylindre ayant pour axe l'axe de rotation et passant par le pôle. Chaque élément de cette hélice est aimanté suivant une tangente au cylindre menée perpendiculairement à l'axe, et son action sur le pôle équivaut à celle d'un aimant infiniment petit situé en un point M dans le plan conducteur. Le lieu des points M est la courbe perspective de l'hélice vue du point A. En désignant par ρ le rayon vecteur MO, par θ l'angle qu'il fait avec la tangente au point O, et remarquant que cet angle θ est la moitié de l'angle φ des deux plans qui passent par l'axe et par les points B et M′, on a, par les triangles AMO et AM′K,

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{AK}} = \frac{2a\sin\frac{\varphi}{2}}{2c + a\varphi\cot\alpha} = \frac{a\sin\theta}{c + a\theta\cot\alpha}.$$

Cette courbe se compose d'une série de boucles fermées ayant une tangente commune au point O.

L'arc KM′ étant égal à $a\varphi$ ou $2a\theta$, le moment magnétique ϖ' de l'élément d'hélice en M′ est $2mad\theta$. Le moment magnétique ϖ de l'aimant correspondant en M est donné par la relation

$$\frac{\varpi}{r^3} = \frac{\varpi'}{r'^3} = \frac{2ma}{r'^3}d\theta.$$

Remarquant que l'on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M'K}} = \frac{\rho}{2a\sin\theta},$$

il en résulte

$$\varpi = \frac{m}{4a^2}\frac{\rho^3 d\theta}{\sin^3\theta}.$$

L'aimant ϖ au point M est parallèle à l'aimantation de l'hélice en M′; il fait donc l'angle θ avec le rayon vecteur ρ de la courbe perspective.

Le calcul de la force en A serait très compliqué, mais il est évident que les portions de la courbe qui correspondent à la

première partie BM' de l'hélice sont prédominantes. D'après la direction des aimants élémentaires sur la courbe perspective, on voit que l'action sur le point A aura une composante verticale, une autre directement opposée à la vitesse du pôle, et une troisième dirigée vers le centre de la circonférence qu'il décrit. Le système entier équivaut encore à un petit aimant situé en arrière du point O, perpendiculaire à un rayon du disque qui fait un certain angle, du côté opposé au mouvement, avec le rayon qui correspond au pôle, l'aimantation étant dans le sens du mouvement, si le pôle considéré est un pôle nord.

Si le plan était indéfini, cet aimant serait à une distance de l'axe plus grande que celle du pôle; mais l'effet des bords tend à le ramener de plus en plus vers le centre, à mesure que le rayon diminue. On retrouve ainsi toutes les particularités de l'expérience d'Arago, entre autres ce fait que la composante radiale est centripète, tant que le pôle est éloigné des bords, et qu'elle devient centrifuge quand il s'en rapproche.

588. — Si le pôle décrit une courbe quelconque parallèle au plan, on obtiendra de même, par la traînée d'images magnétiques correspondantes, l'aimantation en chaque point de la courbe perspective. L'action sur le point A, dans le cas d'un plan indéfini, aura encore une composante verticale, une autre directement opposée au mouvement et une troisième normale à la trajectoire du pôle et dirigée vers la concavité de la courbe.

589. Amortisseurs des boussoles. — L'action d'un disque conducteur sur un système magnétique en mouvement est utilisée dans les boussoles et les galvanomètres, pour amortir les oscillations des aiguilles, sous la forme même où le phénomène a été observé d'abord par Gambey.

Cette action réciproque équivaut à une sorte de frottement qui s'oppose au mouvement relatif des deux systèmes; il en résulte une absorption d'énergie qui correspond précisément à l'échauffement du conducteur par les courants induits.

590. Induction sur un conducteur quelconque. — D'une manière plus générale, lorsqu'un conducteur de forme quelconque se déplace dans un champ magnétique, il en résulte

des courants induits qui s'opposent au mouvement; mais le calcul des effets d'induction présente alors de plus grandes difficultés, parce qu'il faut faire intervenir les trois dimensions du conducteur. Faraday a constaté ainsi que, si l'on place entre les pôles d'un électro-aimant non excité un cube de cuivre rouge suspendu à un fil et animé d'un mouvement de rotation rapide, le cube s'arrête rapidement sitôt qu'on fait passer un courant dans les bobines, et on éprouve une grande résistance pour le remettre en mouvement.

Foucault a eu l'idée d'utiliser cette expérience pour mettre en évidence l'échauffement du conducteur. A l'aide d'un système de roues dentées commandées par une manivelle, il entretient la rotation d'un disque conducteur entre les branches d'un électro-aimant très énergique : le travail dépensé est considérable et la température du disque s'élève très rapidement. La mesure du travail dépensé et de la chaleur correspondante fournit même un moyen de déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur ; c'est le principe de la méthode employée par M. Violle.

CHAPITRE HUITIÈME

PHÉNOMÈNES OPTIQUES

591. Découverte de Faraday. — Après de nombreuses recherches, demeurées longtemps infructueuses, Faraday a découvert en 1845 qu'un corps transparent, dénué par lui-même de pouvoir rotatoire, devient capable, sous l'influence du magnétisme, de faire tourner le plan de polarisation d'un rayon lumineux. L'effet est maximum quand le rayon polarisé traverse le corps parallèlement aux lignes de force; il est nul quand les deux directions sont rectangulaires.

Ce phénomène, constaté d'abord pour le flint lourd, se produit avec des intensités diverses pour tous les corps liquides et les solides monoréfringents; l'action du magnétisme est moins sensible sur les corps biréfringents; elle est extrêmement faible pour les gaz et les vapeurs, et ce n'est que dans des expériences toutes récentes qu'on est parvenu à la constater. Les corps doués naturellement du pouvoir rotatoire donnent lieu au même phénomène: les deux rotations s'ajoutent ou se retranchent, suivant leurs sens respectifs.

592. Corps positifs et négatifs. — Toutes les substances étudiées par Faraday font tourner le plan de polarisation dans le même sens sous l'influence du magnétisme; c'est le sens du courant qui, tournant autour du rayon, donnerait au champ sa direction actuelle. Toutes ces substances sont diamagnétiques. Verdet a trouvé que la plupart des substances magnétiques, par exemple les dissolutions de perchlorure de fer dans l'esprit-de-vin ou l'éther, font tourner le plan de polarisation dans le sens inverse. En considérant la première rota-

tion comme positive, on peut dire, en général, sinon d'une manière absolue, que les substances diamagnétiques font tourner le plan de polarisation dans le sens positif, et les substances magnétiques dans le sens négatif.

593. — Il y a une différence importante dans la manière dont s'effectue la rotation du plan de polarisation, suivant que l'on considère la rotation naturelle ou la rotation magnétique. Dans les deux cas, l'angle de rotation est proportionnel, toutes choses égales d'ailleurs, à l'épaisseur traversée du milieu; mais dans le quartz, l'eau sucrée, l'essence de térébenthine, la rotation est liée à la propagation de la lumière, de sorte qu'elle a toujours lieu dans le même sens pour l'observateur qui reçoit le rayon. Il en résulte que si le rayon, après avoir traversé la substance transparente, revient sur ses pas, à la suite d'une réflexion normale, il éprouve au retour une rotation égale et contraire à la première, et le plan de polarisation retrouve au point de départ sa position primitive.

La rotation magnétique, au contraire, est indépendante du sens de la propagation et ne dépend que de la direction de la force magnétique. Le rayon qui revient sur ses pas, après une réflexion normale, éprouve une rotation, de même sens absolu, qui s'ajoute à la première; on peut ainsi, en faisant réfléchir le rayon normalement un nombre impair de fois, $2n+1$, observer la même rotation que s'il avait traversé une épaisseur $2n+1$ fois plus grande de la substance.

594. Lois de Verdet. — Verdet a démontré par l'expérience que, pour un rayon polarisé homogène, la rotation du plan de polarisation est proportionnelle :

1° A l'épaisseur traversée;

2° A la composante de la force magnétique suivant la direction du rayon;

3° A un coefficient qui dépend de la nature du corps et qui est positif ou négatif, suivant que le corps est diamagnétique ou magnétique.

Ces lois peuvent être résumées dans l'énoncé suivant :

La rotation du plan de polarisation entre deux points est proportionnelle à la différence de potentiel magnétique qui existe entre ces deux points.

Soient V et V′ les valeurs du potentiel en deux points A et A′ pris sur le trajet du rayon; l'angle θ dont le plan de polarisation aura tourné entre ces deux points sera exprimé par la relation

$$\theta = \omega(V - V'),$$

ω étant la rotation qui, pour la substance considérée, correspond à une différence de potentiel égale à l'unité. Cette quantité a reçu le nom de *constante de Verdet;* elle définit le pouvoir rotatoire magnétique du corps.

Verdet a démontré que, lorsqu'un sel est dissous dans l'eau, l'eau et le sel apportent chacun dans la dissolution leur pouvoir rotatoire magnétique spécial; la rotation produite par la dissolution est la somme algébrique des rotations dues à chacun des corps qui la composent. C'est ainsi que, l'eau ayant un pouvoir rotatoire positif et le perchlorure de fer un pouvoir rotatoire négatif, une dissolution de perchlorure de fer fait tourner le plan de polarisation dans un sens ou dans l'autre suivant son degré de concentration. La loi peut être considérée comme générale.

595. Dispersion rotatoire magnétique. — Pour un même corps, la valeur de la constante ω varie avec la longueur d'onde. Le sens de la variation est le même que pour la rotation naturelle: dans les deux cas, en effet, la rotation est approximativement en raison inverse du carré de la longueur d'onde. En réalité, le produit de la rotation par le carré de la longueur d'onde va toujours en augmentant à mesure que la longueur d'onde diminue. Qu'il s'agisse de rotation naturelle ou de rotation magnétique, les substances pour lesquelles cet accroissement est le plus sensible sont celles qui ont le plus grand pouvoir dispersif.

Quelques mois après la publication des découvertes de Faraday, M. Airy a fait remarquer qu'il suffisait, pour rendre compte des phénomènes, d'ajouter aux équations connues du mouvement vibratoire des corps isotropes certains termes proportionnels aux dérivées d'ordre impair des déplacements par rapport au temps. Parmi les différentes formules aux-

quelles on parvient en faisant des hypothèses particulières sur la nature des termes ajoutés aux équations, la suivante

$$\omega = m\frac{n^2}{\lambda_1^2}\left(n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

dans laquelle m est une constante et n l'indice de réfraction de la substance pour un rayon de longueur d'onde λ, présente un accord presque complet avec l'expérience. La constante m, comme nous le verrons plus loin, serait en raison inverse de la perméabilité magnétique.

M. H. Becquerel a remarqué que le quotient du pouvoir rotatoire par le produit $n^2(n^2-1)$ varie très peu pour les diverses substances, et que ce quotient est constant pour les corps d'une même famille chimique.

596. Expérience de M. Kerr. — Lorsqu'un rayon de lumière polarisée se réfléchit sur le pôle d'un aimant, son plan de polarisation, d'après les expériences de M. Kerr, éprouve une rotation manifeste; il est avantageux de rendre la réflexion normale afin d'éviter les effets de polarisation elliptique. Sur un pôle positif ou nord, la rotation s'effectue de gauche à droite pour l'observateur, c'est-à-dire en sens inverse du courant qui produirait l'aimantation. Il est difficile de dire si c'est là une rotation magnétique simple due au gaz, ou, comme le croit M. Kerr, un phénomène nouveau.

597. Interprétation de la polarisation rotatoire. — Les principes de la théorie donnée par Fresnel pour expliquer la polarisation rotatoire du quartz et des liquides actifs peuvent être appliqués à la polarisation rotatoire magnétique.

On sait qu'un rayon de lumière polarisée dans un plan équivaut à deux rayons polarisés circulairement en sens contraires, de même période, marchant avec la même vitesse, et dont l'amplitude de vibration est moitié moindre que celle de la vibration rectiligne résultante.

Pour se représenter chacun des rayons circulaires, on supposera que, toutes les molécules d'une même droite étant écartées de leur position d'équilibre et disposées suivant une hélice ayant cette droite pour axe, on imprime au système une

rotation uniforme autour de l'axe. Chaque point de l'hélice, qui représente une molécule vibrante, décrit une circonférence autour de l'axe et, en même temps, l'hélice prend un mouvement longitudinal apparent qui figure la propagation de l'ondulation. La longueur d'onde, qui est l'espace parcouru pendant une période, est représentée par le pas de l'hélice. Si l'hélice est dextrorsum, comme une vis ordinaire, la vibration a lieu dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre pour un observateur vers lequel se fait la propagation. On dit que le rayon est polarisé circulairement à droite ou, plus simplement, que c'est un rayon circulaire droit. Le rayon circulaire est gauche quand la vibration se fait en sens contraire des aiguilles d'une montre, pour un observateur vers lequel il se propage.

Si l'on superpose ainsi deux hélices de sens contraires partant du même point A, et que chaque molécule du milieu participe au double mouvement, les positions successives qu'elle occupera en vertu des deux vibrations circulaires seront toujours symétriques par rapport au plan passant par le rayon et le point A; le mouvement vibratoire résultant est toujours dans ce plan et, par suite, le rayon reste polarisé rectilignement dans son plan primitif.

On peut admettre que les choses se passent ainsi quand un rayon polarisé rectilignement traverse un corps transparent isotrope à l'état naturel, comme le flint de Faraday. Mais si ce flint est placé dans un champ magnétique, par exemple à l'intérieur d'une bobine cylindrique, et que la lumière se propage parallèlement aux lignes de force et dans leur direction, le rayon reste encore polarisé à la sortie, mais le plan de polarisation a tourné d'un certain angle dans le sens des courants extérieurs de la bobine, c'est-à-dire vers la gauche de l'observateur qui reçoit le rayon. La rotation a lieu vers la droite, au contraire, si la lumière se propage dans une direction opposée.

Dans l'hypothèse des vibrations circulaires, il faut donc que, pendant le passage à travers le milieu actif, l'un des rayons ait pris sur l'autre une avance de phase égale au double de l'angle de rotation du plan de polarisation. Pour

le flint et les substances diamagnétiques, c'est le rayon circulaire gauche qui se met en avance lorsque la propagation se fait dans le sens des lignes de force; l'inverse a lieu pour les milieux magnétiques.

Quoi qu'il en soit, la conception de deux rayons circulaires inverses, qui se propagent dans le milieu avec des vitesses différentes n'est point une pure hypothèse; l'expérience montre, en effet, qu'un rayon circulaire donné n'a pas le même indice de réfraction, suivant qu'il traverse la substance soumise à l'action du magnétisme dans le sens des lignes de force ou en sens contraire.

M. Cornu a vérifié, en outre, que dans les deux cas les variations des indices sont égales et de signes contraires par rapport à celui qu'aurait le rayon dans le même milieu soustrait à l'action du magnétisme.

598. — Cette différence de phase peut être expliquée de plusieurs manières : on peut admettre que, pour les deux rayons, la période reste la même avec une vitesse de propagation différente; ou bien que, la vitesse de propagation restant la même, la période cesse d'être égale pour les deux rayons et différente pour chacun d'eux de ce qu'elle est dans le milieu extérieur; ou enfin, ce qui serait peut-être plus vraisemblable, eu égard aux lois ordinaires de la dispersion, qu'il y a en même temps modification de la période et de la vitesse de propagation.

En général, il est impossible de concevoir un état vibratoire permanent ayant une période différente de celle de la cause qui le produit; mais dans le cas actuel la difficulté ne paraît pas exister, si l'on admet que le milieu qui transmet la lumière est animé lui-même d'un mouvement de rotation dans un sens déterminé; la période du mouvement relatif resterait la même pour les deux rayons et la même que dans le milieu extérieur; l'avance de phase serait due seulement à la différence des mouvements absolus et précisément égale à la moitié de cette différence.

Dans tous les cas, lorsque les deux rayons circulaires sortent du milieu, ils reprennent la même période et la même vitesse de propagation et reconstituent un rayon polarisé rec-

alignement. La différence des temps que mettent ces deux rayons de vitesse V'' et V', à parcourir une épaisseur e du milieu est

$$t = e\left(\frac{1}{V''} - \frac{1}{V'}\right).$$

En appelant T la période du rayon dans l'air, l'interférence à la sortie a donc lieu entre deux rayons dont la différence de phase à l'entrée était

$$(1) \qquad 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\frac{e}{T}\left(\frac{1}{V''} - \frac{1}{V'}\right).$$

Ces rayons ayant dans le milieu des périodes T'' et T', les nombres m'' et m' d'oscillations qu'ils ont effectuées sont

$$m''T'' = \frac{e}{V''} \quad \text{et} \quad m'T' = \frac{e}{V'},$$

ce qui donne

$$m'' - m' = e\left(\frac{1}{V''T''} - \frac{1}{V'T'}\right).$$

La différence de phase à la sortie est donc

$$(2) \qquad 2\pi\left(m'' - m' + \frac{t}{T}\right) = 2\pi e\left[\frac{1}{V''}\left(\frac{1}{T''} + \frac{1}{T}\right) - \frac{1}{V'}\left(\frac{1}{T'} + \frac{1}{T}\right)\right],$$

et la rotation du plan de polarisation

$$(3) \qquad \theta = \pi e\left[\frac{1}{V''}\left(\frac{1}{T''} + \frac{1}{T}\right) - \frac{1}{V'}\left(\frac{1}{T'} + \frac{1}{T}\right)\right].$$

Désignant par V et λ la vitesse et la longueur d'onde du rayon dans l'air, on peut écrire

$$(4) \qquad \theta = \frac{\pi e}{\lambda}\left[\frac{V}{V''}\left(1 + \frac{T}{T''}\right) - \frac{V}{V'}\left(1 + \frac{T}{T'}\right)\right].$$

599. — Quelle que soit la cause qui modifie les vibrations circulaires, il est à prévoir que les effets, étant très petits, devront être égaux et de signes contraires sur les deux rayons circulaires inverses, et qu'ils sont proportionnels à la force magnétique X.

On peut donc écrire, en désignant par U et T la vitesse et la période qu'aurait le rayon considéré, si le champ magnétique était supprimé, et par n l'indice de réfraction relatif à la vitesse U,

$$(5)\qquad \frac{V}{V'}=\frac{V}{U}(1-\alpha X)=n(1-\alpha X),\qquad \frac{V}{V''}=\frac{V}{U}(1+\alpha X)=n(1+\alpha X);$$

et

$$(6)\qquad \frac{T}{T'}=1-\beta X,\quad \frac{T}{T''}=1+\beta X.$$

La rotation du plan de polarisation devient alors

$$\theta=\frac{2\pi e n}{\lambda}(2\alpha+\beta)X.$$

Le champ étant supposé uniforme, le produit eX représente la différence de potentiel à l'entrée et à la sortie du rayon ; on aura donc

$$(7)\qquad \omega=\frac{\theta}{eX}=\frac{2\pi n}{\lambda}(2\alpha+\beta).$$

Pour la rotation naturelle, Fresnel admet que la période ne change pas. Si l'on adopte cette hypothèse, le coefficient β est nul ; en appelant n' et n'' les indices de réfraction des deux rayons circulaires, on a simplement

$$(8)\qquad \omega=\frac{2\pi}{\lambda X}\left(\frac{V}{V''}-\frac{V}{V'}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{n''-n'}{X}=\alpha\frac{4\pi n}{\lambda}.$$

600. — Telle serait la rotation si la vitesse de propagation était indépendante de la longueur d'onde ; mais il faut remar-

quer encore que la polarisation rotatoire introduit une dispersion entre les deux rayons circulaires.

Les vitesses V′ et V″ se rapportent à deux longueurs différentes λ′ et λ″, et les valeurs de U et de n que l'on introduit dans le second membre de l'équation (4) sont relatives à la propagation, dans le milieu à l'état naturel, de vibrations de ces deux longueurs d'ondes. On doit donc écrire, en se bornant aux termes du premier ordre,

$$(5)' \quad \begin{aligned} n' &= \left[n + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda)\right](1 - \alpha X) = n - n\alpha X + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda), \\ n'' &= \left[n + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda)\right](1 + \alpha X) = n + n\alpha X + \frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda); \end{aligned}$$

il en résulte

$$(9) \qquad \omega = \alpha \frac{4\pi}{\lambda}\left[n + \frac{1}{2\alpha X}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda')\right].$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = \frac{V''}{V'} = \frac{1 - \alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda)}{1 + \alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda'' - \lambda)} = 1 - 2\alpha X + \frac{1}{n}\frac{dn}{d\lambda}(\lambda' - \lambda'');$$

ce qui donne, au même degré d'approximation,

$$\frac{\lambda'' - \lambda'}{2\alpha X} = -\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = -\lambda.$$

La rotation magnétique devient alors

$$(10) \qquad \omega = \alpha \frac{4\pi}{\lambda}\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right).$$

On voit qu'il faut multiplier le résultat indépendant de la dispersion par le facteur $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$.

Le coefficient α est lui-même une fonction de la longueur d'onde. Pour retrouver la formule du n° 595, qui satisfait

le mieux aux expériences, il suffit que ce coefficient soit proportionnel à $\frac{n^3}{\lambda^3}$. Nous verrons dans quel ordre d'idées on peut retrouver cette formule par la théorie.

601. Remarques de sir W. Thomson. — Les phénomènes de polarisation rotatoire magnétique, d'après sir W. Thomson, paraissent être la confirmation des idées d'Ampère sur la nature intime du magnétisme.

« L'influence du magnétisme sur la lumière, découverte « par Faraday, dépend du sens du mouvement des particules « mobiles. Par exemple, dans un milieu qui possède cette « propriété, les particules situées sur une droite parallèle aux « lignes de force, déplacées sur une hélice ayant cette ligne « comme axe, puis projetées tangentiellement avec une vi- « tesse capable de leur faire décrire des cercles, auront des « vitesses différentes suivant que leur mouvement s'effectuera « dans un sens (par exemple celui du courant qui produit le « champ) ou dans le sens opposé. Mais la réaction élastique « du milieu doit être la même pour des déplacements égaux, « quelles que soient les vitesses et la direction des parti- « cules ; c'est-à-dire, les forces qui font équilibre à la force « centrifuge du mouvement circulaire doivent être égales, « bien que les mouvements lumineux soient inégaux.

« Les mouvements circulaires absolus étant ou égaux ou « capables de donner des forces centrifuges égales aux parti- « cules considérées en premier lieu, il faut que les mouve- « ments lumineux soient seulement des composantes du mou- « vement total ; et que la moindre composante lumineuse dans « une direction, composée avec le mouvement qui existe dans « le milieu quand il ne transmet pas de lumière, donne la « même résultante que le plus grand mouvement lumineux « composé avec le même mouvement non lumineux.

« A mon avis, il est non seulement impossible de concevoir « autrement que par cette explication dynamique comment « un rayon polarisé circulairement qui traverse un morceau « de verre aimanté parallèlement aux lignes de force peut, « tout en conservant la même qualité, c'est-à-dire en restant « toujours droit ou toujours gauche, se propager avec une

« vitesse différente, suivant qu'il se meut dans le sens des « lignes de force ou en sens contraire, mais je pense qu'on « peut démontrer qu'il n'y a pas d'autre explication possible.

« Il semble résulter de là que la découverte de Faraday « apporte une démonstration de la réalité de l'hypothèse « d'Ampère sur la nature intime du magnétisme, et donne « une définition de l'aimantation dans la théorie mécanique « de la chaleur.

« L'introduction du principe de la conservation des aires « dans l'hypothèse des tourbillons (*vortices*) moléculaires « conduit à ce résultat que la ligne, perpendiculaire au plan « sur lequel la somme des projections des aires des mouve- « ments thermiques est un maximum (plan maximum des « aires), pourrait bien être l'axe magnétique du corps aimanté « et suggère l'idée que le moment magnétique se trouverait « alors défini par la valeur de cette projection.

« L'explication de tous les phénomènes d'attraction et de « répulsion électromagnétique, ainsi que d'induction électro- « magnétique, doit dès lors être cherchée simplement dans « l'inertie et la pression de la matière dont le mouvement « constitue la chaleur. Maintenant, que cette matière soit ou « non l'électricité, qu'elle soit un fluide continu remplissant « les espaces inter-moléculaires, ou qu'elle soit elle-même « groupée moléculairement; ou encore, toute matière est-elle « continue et l'hétérogénéité moléculaire n'est-elle due qu'à « des tourbillons finis ou à d'autres mouvements relatifs des « parties contiguës d'un corps; ce sont des points qu'il est « impossible de décider et sur lesquels il serait peut-être oiseux « de faire des spéculations dans l'état actuel de la science. » (*Reprint of Papers*, p. 419.)

602. Double réfraction électrique. — On sait que, toutes les fois qu'un corps transparent monoréfringent est soumis à une action mécanique, telle qu'une pression ou une tension suivant une direction déterminée, ce corps acquiert d'une manière passagère les propriétés d'un corps biréfringent, l'axe de double réfraction étant dirigé suivant la ligne de pression ou de traction.

M. Kerr a montré que tout corps diélectrique monoré-

fringent solide ou liquide, placé dans un champ électrique, acquiert la double réfraction accidentelle ; l'axe de double réfraction coïncide avec la ligne de force, et, suivant la nature du corps, la vitesse du rayon extraordinaire est plus grande ou plus petite que celle du rayon ordinaire.

Appelons δ l'intensité de la double réfraction, c'est-à-dire la différence de marche qui s'établit entre les deux rayons ordinaire et extraordinaire, pour une épaisseur du diélectrique égale à l'unité, et V la différence de potentiel électrostatique entre deux points situés à une distance d; la force électrique F dans la région considérée est égale à $\frac{V}{d}$. M. Kerr déduit de ses expériences la relation

$$\delta = k\frac{V^2}{d^2} = kF^2,$$

k étant une constante caractéristique du corps, positive ou négative suivant les cas. Il en résulte que *l'intensité de double réfraction électrique est proportionnelle au carré de la force électrique*.

Nous avons vu (**107**) que le diélectrique peut être considéré comme soumis dans le sens des lignes de force à une tension proportionnelle au carré de la force. Il semble donc que le phénomène observé par M. Kerr peut être considéré comme une double réfraction accidentelle due à la tension électrostatique du milieu.

CHAPITRE NEUVIÈME

UNITÉS ÉLECTRIQUES

602. Unités fondamentales. Unités dérivées. — Pendant longtemps on s'est borné, dans les phénomènes d'électricité et de magnétisme, à évaluer les diverses quantités en fonction d'unités arbitraires dont le choix était déterminé pour chaque cas particulier par la commodité des expériences. Cette méthode, alors même que les unités employées ont été convenablement définies, a le grave inconvénient, non seulement de rendre très difficile la comparaison des résultats obtenus par différents observateurs, mais surtout de masquer les relations qui peuvent exister entre les divers ordres de phénomènes. Il est donc de la plus grande importance, pour les progrès de la science, d'établir une entente commune sur le choix des unités, et, en même temps, que les unités adoptées présentent entre elles ce caractère de coordination qui fait la supériorité du système métrique.

Les unités qui correspondent aux diverses espèces de grandeurs pourraient, en effet, être choisies d'une manière arbitraire et indépendamment les unes des autres; mais il y a un avantage manifeste à les faire dépendre d'un nombre aussi petit que possible d'unités simples. C'est ainsi qu'en géométrie, par exemple, l'unité de surface et l'unité de volume peuvent être dérivées de l'unité de longueur. En cinématique s'introduit, avec la vitesse, une nouvelle notion et une nouvelle unité, celle du temps. L'étude de la dynamique amène une troisième unité, indépendante des deux premières, l'unité de

force ou l'unité de masse. Toutes les grandeurs mécaniques peuvent ainsi être évaluées en fonction des trois unités de longueur, de temps et de masse, ou de longueur, de temps et de force. Dans un système coordonné, les unités irréductibles sont appelées *unités fondamentales;* les autres sont désignées sous le nom d'*unités dérivées.*

Toutes les grandeurs que l'on considère en électricité et en magnétisme ont été définies par leurs propriétés mécaniques; elles peuvent donc être mesurées, comme les quantités mécaniques elles-mêmes, en fonction des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse.

Un système de mesures fondé sur ces principes est appelé un *système absolu,* le mot absolu étant employé par opposition au mot *relatif,* qui caractériserait un système de mesures indépendantes les unes des autres.

604. Dimensions d'une unité dérivée. — Soient n l'expression numérique d'une quantité, c'est-à-dire le nombre d'unités qu'elle renferme, et [N] la grandeur de l'unité de comparaison; si cette unité était prise égale à [N'], la grandeur mesurée serait exprimée par un autre nombre n' et on aurait la relation

$$n[N] = n'[N'],$$

qui donne

$$\frac{n'}{n} = \frac{[N]}{[N']}.$$

Il en résulte que *le rapport des valeurs numériques d'une quantité donnée est égal au rapport inverse des grandeurs des unités qui lui ont servi de mesure.*

Quand l'unité est une unité dérivée et qu'elle varie par suite d'un changement dans la grandeur des unités fondamentales, il faut, pour connaître ce dernier rapport, savoir de quelle manière l'unité dérivée dépend des unités fondamentales. On appelle *dimensions* d'une unité dérivée la relation qui lie cette unité aux unités fondamentales.

Nous représenterons par les symboles [L], [M] et [T] les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps, et par une lettre entre crochets $[x]$ la grandeur d'une unité quel-

conque. Les dimensions de l'unité de surface seront représentées par le symbole $[L^2]$ et celles de l'unité de volume par le symbole $[L^3]$; cela signifie que l'unité de surface varie comme le carré, et l'unité de volume comme le cube de l'unité de longueur.

Plus généralement, si les dimensions d'une unité dérivée sont exprimées par le symbole $[L^p M^q T^r]$, et qu'on prenne successivement, comme unités fondamentales, des valeurs L, M, T et L', M', T', le rapport des valeurs de l'unité dérivée dans les deux systèmes sera

$$\frac{[N']}{[N]} = \left(\frac{L'}{L}\right)^p \left(\frac{M'}{M}\right)^q \left(\frac{T'}{T}\right)^r.$$

605. Unités dérivées mécaniques. — Les principales grandeurs dérivées en mécanique sont la *vitesse*, l'*accélération*, la *force*, et le *travail* ou l'*énergie*.

Vitesse $[v]$. — La vitesse v est le chemin parcouru par un mobile dans l'unité de temps, ou le quotient d'une longueur par un temps. Les dimensions de l'unité de vitesse seront donc exprimées par la formule

$$[v] = [LT^{-1}].$$

Accélération $[\gamma]$. — L'accélération γ est le rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps; par suite, le quotient d'une vitesse par un temps, et l'on a, pour les dimensions de l'unité,

$$[\gamma] = [LT^{-2}].$$

Force $[f]$. — La force f est le produit d'une masse par une accélération, ce qui donne

$$[f] = [LMT^{-2}].$$

Travail, *Énergie* $[W]$. — Le travail ou l'énergie W est le produit d'une force par une longueur; la force vive, qui est

une quantité de même espèce, est le produit d'une masse par le carré d'une vitesse. On obtient, dans les deux cas,

$$[W] = [L^2MT^{-2}].$$

L'unité de force est celle qui, agissant sur l'unité de masse, lui communique pendant l'unité de temps une accélération égale à l'unité.

L'unité de travail est le travail produit par l'unité de force, quand son point d'application se déplace de l'unité de longueur dans sa propre direction.

Ces deux dernières unités ne sont pas celles de la pratique ordinaire : on prend plus habituellement le poids d'un corps comme unité de force, par exemple le gramme ou le kilogramme, et le kilogrammètre comme unité de travail. Cela revient à choisir l'unité de force, au lieu de l'unité de masse, comme troisième unité fondamentale. Le choix d'un poids, tel que celui du kilogramme des Archives à Paris, comme unité de force, présente l'inconvénient que si ce corps, ou tout autre équivalent, est transporté en un autre point du globe, son poids réel ne représentera plus l'unité de force, par suite du changement de l'intensité de la pesanteur; la masse d'un corps, au contraire, est une quantité invariable, en quelque lieu qu'il soit placé.

Il est facile de voir la relation qui existe entre ces deux unités : la formule $p = mg$, dans laquelle m représente la masse d'un corps, et p son poids en un lieu où l'accélération de la pesanteur est g, montre que, si la masse d'un corps est égale à l'unité, son poids lui imprimera une accélération égale à g et vaut, par suite, g fois l'unité de force, telle qu'elle a été définie plus haut, l'accélération g étant exprimée en fonction de la longueur choisie comme unité fondamentale.

Ainsi, si l'on prend comme unités le mètre et la masse du kilogramme, l'unité de force est $\frac{1}{9,81}$ kilogramme, ou environ 100 grammes. Avec le kilogramme comme unité de force, l'unité de masse est celle d'un corps qui pèse 9,81 kilogrammes.

606. Unités dérivées électriques et magnétiques. — Les grandeurs électriques les plus importantes sont la *quantité d'électricité*, l'*intensité du champ électrique*, le *potentiel* ou la *force électromotrice*, la *capacité*, l'*intensité du courant*, la *résistance*, etc. On aura, de même, pour les grandeurs magnétiques, la *quantité de magnétisme*, l'*intensité du champ magnétique*, la *puissance magnétique d'un feuillet*, etc. Toutes ces grandeurs sont reliées entre elles par les relations qui les définissent; et, si l'une est donnée, toutes les autres s'en déduisent.

Pour constituer un système absolu, il faut que la quantité qui sert de point de départ puisse être mesurée directement en unités mécaniques. Ainsi, on pourra définir la quantité d'électricité par la loi de Coulomb (7), ou bien la quantité de magnétisme par la loi correspondante (293), ou encore l'intensité du courant par la formule électrodynamique d'Ampère (473). De là, trois systèmes de mesures absolus, indépendants et incompatibles, dans lesquels les diverses unités sont liées d'une manière différente aux unités fondamentales, et auxquels on a donné les noms de *système électrostatique*, *système électromagnétique*, *système électrodynamique*.

Il n'y a aucune raison théorique pour préférer l'un de ces systèmes aux autres; deux cependant ont une plus grande importance pratique, ce sont les systèmes électrostatique et électromagnétique. Les unités du système électrodynamique ne diffèrent d'ailleurs que par un facteur numérique (473) des unités électromagnétiques correspondantes, et elles se présentent d'une manière moins simple dans les applications. Nous nous occuperons exclusivement des deux premières; nous représenterons par de petites lettres les quantités qui seront évaluées dans le système électrostatique, et par des majuscules les expressions des mêmes grandeurs dans le système électromagnétique.

607. Système électrostatique. — *Quantité d'électricité* $[q]$. — La loi de Coulomb donne, pour la répulsion f qui s'exerce entre deux masses égales q à la distance d,

$$f=\frac{q^2}{d}, \quad \text{ou} \quad q=d\sqrt{f}.$$

On en déduit, pour les dimensions de l'unité d'électricité,

$$[q]=[d][f^{\frac{1}{2}}]=[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

Densité superficielle. Déplacement électrique $[\sigma]$. — La densité est la quantité d'électricité par unité de surface (**18**); le déplacement aussi est la quantité qui a traversé l'unité de surface (**126**); on aura donc

$$[\sigma]=[q][L^{-2}]=[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

Force électrique. Intensité du champ $[h]$. — C'est la force qui agit sur l'unité de masse électrique au point considéré, ce qui donne, pour les dimensions de l'unité,

$$[h]=[f][q^{-1}]=[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}];$$

elles sont les mêmes que celles de la densité, comme on pouvait le prévoir par le théorème de Coulomb (**35**).

Le *flux électrique*, qui est le produit de la force électrique par une surface, a pour dimensions $[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$.

Pouvoir inducteur spécifique $[k]$. — Le pouvoir inducteur spécifique est un nombre dans le système électrostatique.

Force électromotrice ou *potentiel électrostatique* $[e]$. — Le potentiel d'une masse électrique à une distance d est le quotient de la masse par cette distance ; on a donc

$$[e]=L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

Capacité électrostatique $[c]$. — La capacité d'un condensateur est le quotient de sa charge par la différence de potentiel des armatures, et l'on a

$$c=\frac{q}{e}, \quad \text{ou} \quad [c]=[L].$$

La capacité électrostatique est donc une longueur, comme on l'a déjà vu (**73**).

Intensité du courant $[i]$. — L'intensité d'un courant (**201**) est la quantité d'électricité qui traverse la section d'un fil dans l'unité de temps, ou le quotient d'une quantité q par le temps t qu'elle met à traverser cette section. On a ainsi

$$i=\frac{q}{t}, \quad \text{ou} \quad [i]=[\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-2}].$$

Résistance $[r]$. — La résistance d'un conducteur se trouve définie par la loi d'Ohm (**204**). C'est le quotient de la force électromotrice entre deux points par l'intensité du courant, ce qui donne

$$r=\frac{e}{i}, \quad \text{et} \quad [r]=[\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}].$$

La résistance électrostatique est donc l'inverse d'une vitesse, comme nous l'avons déjà démontré (**206**).

Quantité de magnétisme $[q']$. — Dans le système électrostatique, la quantité de magnétisme est définie par la condition que l'action d'un pôle magnétique de masse q' sur une portion de courant d'intensité i et de longueur l très petite, située à la distance d du pôle et perpendiculaire à la droite qui joint son milieu au pôle, soit exprimée par la loi élémentaire (**158**)

$$f=\frac{ilq'}{d^2}, \quad \text{ou} \quad q'=\frac{fd^2}{il};$$

on en déduit

$$[q']=[\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}].$$

Densité magnétique $[\sigma']$. — La densité superficielle étant la quantité de magnétisme par unité de surface, on a

$$[\sigma']=[\mathrm{L}^{-\frac{3}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}].$$

Force magnétique. Champ magnétique $[h']$. — C'est la force qui agit sur l'unité de masse magnétique ; par suite

$$[h']=[f][q'^{-1}]=[\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-2}].$$

Potentiel magnétique [e']. — Le potentiel magnétique est le travail de la force magnétique, c'est-à-dire le produit de cette force par une longueur ; on aura donc

$$[e'] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-2}].$$

Puissance magnétique [φ]. — La puissance magnétique d'un feuillet est le produit de la densité superficielle par l'épaisseur du feuillet, ce qui donne

$$[\varphi] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

608. Système électromagnétique. — *Quantité de magnétisme* [Q′]. — Dans le système électromagnétique, le point de départ des mesures est la définition de la quantité de magnétisme par la loi de Coulomb,

$$f = \frac{Q'^2}{d^2}; \quad \text{d'où} \quad [Q'] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Ce sont naturellement les mêmes dimensions que celles de l'unité d'électricité dans le système électrostatique.

Densité superficielle magnétique [Σ′]. *Force magnétique; Intensité du champ* [H′]. *Potentiel magnétique* [E′]. — Il résulte de la remarque qui précède que les dimensions de ces diverses unités seront les mêmes que celles des quantités électriques correspondantes dans le système électrostatique, savoir :

$$[\Sigma'] = [H'] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$
$$[E'] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Puissance magnétique [Φ]. *Intensité du courant* [I]. — La puissance magnétique d'un feuillet étant le produit de la densité superficielle par l'épaisseur, on a

$$[\Phi] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Ces dimensions sont les mêmes que celles du potentiel, résultat qui était évident (**329**).

L'intensité du courant a la même valeur et les mêmes dimensions que la puissance magnétique d'un feuillet (**450**).

Quantité d'électricité [Q]. — La quantité d'électricité étant le produit d'une intensité de courant par un temps, on a

$$[Q] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Ces dimensions sont les mêmes que celles de la quantité de magnétisme dans le système électrostatique; par conséquent, dans le système électromagnétique, la *densité superficielle*, la *force* et le *potentiel électriques* auront les mêmes dimensions que les quantités magnétiques correspondantes dans le système électrostatique.

Pouvoir inducteur spécifique [K]. — Le pouvoir inducteur spécifique (**126**) est en raison inverse du coefficient d'élasticité électrique du milieu, c'est-à-dire proportionnel au rapport du déplacement à la force correspondante, ce qui donne

$$[K] = [L^{-2} T^{2}];$$

il est donc égal à l'inverse du carré d'une vitesse.

Résistance [R]. — La résistance d'un conducteur peut être définie par la loi de Joule (**211**), qui donne

$$W = I^{2} R t,$$

d'où l'on déduit

$$[R] = [L T^{-1}].$$

La résistance électromagnétique est donc une vitesse; nous avons obtenu ce résultat directement (**407**). Supposons que les deux rails et la barre de l'expérience considérée dans ce paragraphe soient sans résistance appréciable, et qu'il n'y ait d'autre résistance dans le circuit que celle du fil qui réunit les deux points A et B. La résistance de ce fil sera égale à l'unité absolue, si la barre, étant égale à l'unité de longueur et se déplaçant dans un champ égal à l'unité, avec une vitesse égale à l'unité, perpendiculairement aux lignes de force,

produit un courant capable de dégager dans le fil, sous forme de chaleur, une unité d'énergie par seconde.

Force électromotrice [E]. — La force électromotrice se déduit de la loi d'Ohm

$$E = IR,$$

et ses dimensions sont

$$[E] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Capacité [C]. — La capacité étant le rapport de la quantité d'électricité qui charge un condensateur à la différence de potentiel des deux armatures, on a encore

$$C = \frac{Q}{E}, \quad \text{ou} \quad [C] = [L^{-1} T^{2}].$$

609. Dimensions des principales unités. — On déterminerait de la même manière les dimensions des autres quantités que nous n'avons pas examinées. Nous résumerons dans les tableaux suivants les dimensions des quantités les plus importantes.

UNITÉS FONDAMENTALES.

Longueur	$[L]$,
Masse	$[M]$,
Temps	$[T]$.

UNITÉS DÉRIVÉES MÉCANIQUES.

Vitesse	$[LT^{-1}]$,
Accélération	$[LT^{-2}]$,
Force	$[LMT^{-2}]$,
Énergie	$[L^{2}MT^{-2}]$.

UNITÉS DÉRIVÉES ÉLECTRIQUES.

	Système électrostatique.	Système électromagnétique.
Quantité d'électricité	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$
Densité électrique superficielle. Déplacement électrique	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$
Force électrique. Champ électrique	$[L^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$
Flux de force électrique	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	$[L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$
Pouvoir inducteur spécifique	1	$[L^{-2}T^{2}]$
Potentiel électrostatique. Force électromotrice	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$
Capacité électrostatique	$[L]$	$[L^{-1}T^{2}]$
Intensité de courant	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Résistance	$[L^{-1}T]$	$[LT^{-1}]$

UNITÉS DÉRIVÉES MAGNÉTIQUES.

	Système électrostatique.	Système électromagnétique.
Quantité de magnétisme	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Densité superficielle	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Force magnétique. Champ magnétique	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Flux de force magnétique	$[L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Potentiel magnétique	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Puissance magnétique	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Moment magnétique	$[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Intensité d'aimantation	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$
Coefficient d'aimantation. Perméabilité magnétique	$[L^{-2}T^{2}]$	1
Constante de Verdet	$[L^{-\frac{3}{2}}M^{-\frac{1}{2}}T^{2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}T]$
Coefficients d'induction mutuelle et de self-induction	$[L^{-1}T^{2}]$	$[L]$

610. Relations entre les deux systèmes d'unités. — Pour établir la relation qui existe entre les unités correspondantes des deux systèmes, il suffit de comparer leurs dimensions, ou encore d'égaler les expressions numériques d'une même quantité en fonction de chacune d'elles. Considérons, par exemple, les diverses expressions d'une même quantité W d'énergie ; on aura les égalités

$$\begin{aligned} W &= i^2rt = I^2Rt, \\ W &= eit \;= EIt, \\ W &= eq \;= EQ, \\ W &= e^2c = E^2C. \end{aligned}$$

On en déduit, en désignant par a une constante,

$$a = \sqrt{\frac{R}{r}} = \frac{i}{I} = \frac{E}{e} = \frac{q}{Q} = \sqrt{\frac{c}{C}}.$$

Ces relations existant entre les valeurs numériques, on aura pour les rapports des unités correspondantes (604)

$$\frac{[I]}{[i]} = \frac{[e]}{[E]} = \frac{[Q]}{[q]} = a,$$
$$\frac{[r]}{[R]} = \frac{[C]}{[c]} = a^2.$$

La constante a désigne donc le nombre d'unités électrostatiques $[q]$ d'électricité qui existent dans une unité électromagnétique $[Q]$.

Puisque la résistance électromagnétique R est une vitesse et la résistance électrostatique r l'inverse d'une vitesse, le rapport $\frac{R}{r}$ ou $\frac{[r]}{[R]}$ est carré d'une vitesse. Ce rapport étant égal à a^2, il en résulte que la constante a est elle-même une vitesse.

Un grand nombre d'expériences ont été faites pour déterminer la valeur de cette constante. Il se présente évidemment autant de méthodes qu'il y a de quantités pouvant être mesurées à la fois directement en unités électrostatiques et en

unités électromagnétiques. Tous les résultats obtenus oscillent autour du nombre qui exprime la vitesse de la lumière dans l'air. Il est probable que ce n'est pas une coïncidence fortuite et que l'égalité des deux nombres tient à une corrélation dans la nature des phénomènes. La vitesse de la lumière est très approximativement de 300,000 kilomètres par seconde. C'est ce nombre que nous adopterons pour le rapport a, en l'exprimant en fonction de la longueur qui aura été choisie comme unité fondamentale.

611. Choix des unités fondamentales. — Le choix des grandeurs adoptées comme unités de temps, de longueur et de masse est évidemment arbitraire. Pour l'unité de temps, la seconde sexagésimale de temps moyen adoptée par toutes les nations civilisées s'imposait naturellement ; pour l'unité de longueur, il convenait également de prendre le mètre ou une fraction décimale du mètre. Quant à l'unité de masse, il y a intérêt à adopter la masse de l'unité de volume de l'eau à son maximum de densité ; on conserve ainsi l'avantage que le poids spécifique de l'eau est égal à l'unité et que le poids d'un corps est égal au produit de son volume par sa densité.

Le système absolu qui s'éloignerait le moins des habitudes établies dans l'usage des mesures métriques consisterait à prendre, comme unités fondamentales, le décimètre et la masse du kilogramme.

Gauss et Weber, qui ont introduit dans la science le premier système absolu, avaient choisi le millimètre et la masse du milligramme. L'association Britannique a admis, sur la proposition de sir W. Thomson, le centimètre et la masse du gramme. Ces dernières unités ont été adoptées définitivement, pour les mesures électriques et magnétiques, par le Congrès international des Électriciens réuni à Paris en 1881.

612. Système absolu C.G.S. — Il a été convenu que les unités dérivant du *centimètre*, de la *masse du gramme* et de la *seconde* de temps moyen constitueraient le système absolu proprement dit et qu'on les désignerait par le symbole C.G.S.

Ces unités n'ont pas reçu de dénominations spéciales. Ainsi l'unité de force C.G.S. est la force qui, agissant sur la masse d'un gramme, lui communique en une seconde une

accélération d'un centimètre. Il en résulte qu'un gramme vaut g unités de force C.G.S. et un kilogramme $g.10^3$ unités C.G.S., la valeur de g étant exprimée en centimètres. De même, un kilogrammètre vaut $g.10^5$, c'est-à-dire 981.10^5 ou environ 10^8 unités de travail C.G.S. Dans ce système, la valeur de a est 3.10^{10}.

612. Système pratique. — Les valeurs des unités absolues du système C.G.S. ne se trouvent malheureusement pas en rapport convenable avec les grandeurs que l'on doit mesurer dans la pratique. Ainsi l'unité absolue de résistance électromagnétique C.G.S. n'est guère que la résistance d'un vingt-millième de millimètre d'un fil de cuivre d'un millimètre de diamètre, et l'unité de force électromotrice serait la cent-millionième partie de celle d'un couple Daniell. Aussi le Comité de l'Association Britannique, institué en 1861 pour l'établissement d'un système rationnel de mesures électriques, avait-il été conduit à choisir des unités plus conformes aux nécessités de la pratique et à donner à ces unités des noms spéciaux, afin de faciliter le langage. Ce système a été consacré, sous la forme suivante, par le Congrès de Paris :

L'unité pratique de résistance est égale à 10^9 unités absolues C.G.S. et prend le nom d'*Ohm* (1);

On appelle *Volt* l'unité pratique de force électromotrice : le volt vaut 10^8 unités C.G.S. (2);

On appelle *Ampère* le courant produit par la force électromotrice d'un volt dans un circuit ayant une résistance d'un ohm : l'ampère vaut 10^{-1} unités C.G.S.

(1) Le Comité de l'Association Britannique a fait de nombreuses expériences pour déterminer la valeur de l'ohm et construire des étalons matériels présentant la même résistance. Les premières recherches semblaient indiquer que l'ohm est représenté très approximativement par la résistance d'une colonne de mercure à la température de 0° centigrade qui aurait un millimètre carré de section et une longueur de 104 centimètres; mais il semble que certaines erreurs aient été commises dans le calcul des expériences et que cette longueur doive être augmentée d'un centième environ, c'est-à-dire portée à 105 centimètres. Des travaux récents conduisent au même résultat, mais la question ne paraît pas encore définitivement résolue. Comme il n'est pas certain, d'autre part, que les métaux solides conservent leurs propriétés électriques sans altération, le Congrès de Paris a décidé que l'ohm serait représenté par une colonne de mercure à la température de 0° ayant un millimètre carré de section, et qu'une commission internationale serait chargée de déterminer, par de nouvelles expériences, la longueur que l'on adoptera pour cette unité dans la pratique.

(2) La force électromotrice d'un couple Daniell est d'environ 1,08 volt.

On appelle *Coulomb* la quantité d'électricité qui dans une seconde traverse la section d'un conducteur parcouru par un courant d'un ampère : le coulomb vaut 10^{-1} unités C.G.S.

On appelle *Farad* la capacité d'un condensateur dont les armatures prennent une différence de potentiel d'un volt quand la charge est d'un coulomb ; le farad vaut 10^{-9} unités C.G.S.

Dans certaines applications il est utile d'exprimer les différentes grandeurs à l'aide d'unités qui soient un million de fois plus petites ou plus grandes que l'unité pratique correspondante. On désigne ces nouvelles unités par le même nom, précédé du préfixe *méga* ou *micro*, suivant qu'elles sont des multiples ou des sous-multiples par un million.

Ainsi le multiple appelé *megohm* vaut 10^6 ohms; le sous-multiple appelé *microhm* vaut 10^{-6} ohms. De même, pour la capacité, le millionième du farad ou *microfarad* vaut 10^{-6} farads ou 10^{-15} unités C.G.S.

Le microfarad est en réalité l'unité pratique de capacité, car le farad a encore une valeur beaucoup trop grande. Par exemple, la capacité électrostatique de la terre est égale à son rayon R ; sa capacité électromagnétique C est égale au quotient du rayon par a^2, ce qui donne

$$C = \frac{R}{a^2} = \frac{2.10^9}{\pi}\,\frac{1}{3^2.10^{20}} = 708.10^{-15} \text{ unités C.G.S.},$$

c'est-à-dire 708 microfarads.

Il est important de faire observer que les unités pratiques constituent elles-mêmes un système absolu, dans lequel les unités fondamentales sont :

$[L] = 10^7$ mètres ou le quart du méridien terrestre,
$[M] = 10^{-11}$ de la masse d'un gramme,
$[T] =$ une seconde.

Une autre remarque utile à signaler est que, dans le système pratique, il suffit de diviser par g exprimé en mètres, c'est-à-dire sensiblement par 10, l'expression du travail électrique pour avoir sa valeur en kilogrammètres.

En effet, l'unité pratique de travail électrique s'obtiendra,

par exemple, en multipliant un volt par un ampère, ce qui donne 10^7 unités C.G.S. Or, nous avons vu (**612**) qu'un kilogrammètre vaut environ 10^8 unités C.G.S., c'est-à-dire 10 fois plus. Le même travail en kilogrammètres sera donc exprimé par un nombre 10 fois moindre.

614. Valeurs comparatives des principales unités. — Nous résumerons dans le tableau suivant les valeurs des unités pratiques en unités absolues C.G.S., et aussi en fonction des unités de Gauss et Weber, qui ont été employées dans un certain nombre de mémoires sur l'électricité.

UNITÉS FONDAMENTALES.	UNITÉS PRATIQUES.	UNITÉS C.G.S.	UNITÉS DE GAUSS ET WEBER.
Longueur,	10^7 mètres,	Centimètre,	Millimètre,
Masse,	10^{-11} gramme,	Gramme,	Milligramme,
Temps.	Seconde.	Seconde.	Seconde.
Résistance	Ohm	10^9	10^{10}
Force électromotrice	Volt	10^8	11^{11}
Courant	Ampère	10^{-1}	10
Quantité	Coulomb	10^{-1}	10
Capacité	Farad	10^{-9}	10^{-10}

615. Conception physique de la vitesse a. — On peut donner une représentation physique de la vitesse a qui exprime le rapport des unités d'électricité dans les deux systèmes.

Supposons, par exemple, qu'une sphère de rayon R, ou un condensateur de même capacité, étant chargée de manière que son potentiel électrostatique soit égal à l'unité, on la décharge n fois pendant le temps t à travers un conducteur : l'intensité moyenne du courant en unités électrostatiques sera $\frac{nR}{t}$. Si l'on détermine n de manière que l'intensité de ce courant soit égale à l'unité électromagnétique, l'expression $\frac{nR}{t}$ représentera le nombre d'unités électrostatiques d'électricité qui existent dans une unité électromagnétique, c'est-à-dire la valeur de a, et cette expression est une vitesse.

616. — Maxwell indique un autre mode de représentation, fondé sur l'hypothèse que l'action extérieure d'une masse électrique en mouvement équivaut à celle d'un courant.

Considérons un plan recouvert d'une charge uniforme d'électricité de densité σ, et se déplaçant d'un mouvement uniforme suivant sa propre surface avec une vitesse u.

Chaque bande de largeur égale à l'unité et parallèle à la direction du mouvement est l'équivalent d'un courant dont l'intensité est σu en mesures électrostatiques, et $\frac{\sigma u}{a}$ en mesures électromagnétiques. Supposons maintenant qu'un second plan parallèle au premier, à une distance δ, se meuve de la même manière et dans la même direction avec une vitesse u', et soit σ' sa densité. Deux espèces d'actions vont se produire entre ces plans : une répulsion électrostatique en vertu de leurs charges de même signe, et une attraction électrodynamique due aux courants parallèles et de même sens.

Prenons dans le second plan une bande de longueur l et de largeur infiniment petite b, et dans le premier plan une bande parallèle indéfinie de largeur dx, située à une distance x de la projection de la bande bl. L'action électromagnétique exercée par cette bande indéfinie sur la première, située à la distance $\sqrt{\delta^2+x^2}$, a pour valeur (**180**)

$$2\frac{\sigma u}{a}dx\frac{\sigma' u'}{a}b\frac{l}{\sqrt{\delta^2+x^2}}=2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\frac{dx}{\sqrt{\delta^2+x^2}},$$

et sa composante df suivant la normale aux plans est

$$df=2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\frac{\delta dx}{\delta^2+x^2}.$$

Pour avoir l'action totale du premier plan mobile sur la portion considérée bl du second, il faut intégrer cette expression depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$, ce qui donne

$$f=2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta dx}{\delta^2+x^2}=2\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl\left[\operatorname{arc\,tg.}\frac{x}{\delta}\right]_{-\infty}^{+\infty},$$

ou

$$f=2\pi\frac{\sigma\sigma' uu'}{a^2}bl.$$

D'autre part, la charge électrostatique de cette surface est $bl\sigma'$. Comme l'action du premier plan indéfini sur l'unité de masse est égale à $2\pi\sigma$, la répulsion f' exercée sur cette surface est normale et a pour valeur

$$f' = 2\pi\sigma\sigma' bl.$$

Si ces deux actions sont égales, il en sera de même pour toutes les autres portions du second plan, et l'équilibre existera entre eux. Il faut, pour cela, qu'on ait $uu' = a^2$, ou, si les vitesses u et u' sont égales, $u = a$.

La constante a est donc la vitesse qu'il faudrait donner à deux plans parallèles indéfinis, uniformément électrisés et se mouvant dans la même direction, pour que leur attraction électrodynamique soit égale à leur répulsion électrostatique. La vitesse a étant celle de la lumière, l'expérience est irréalisable sous cette forme.

617. — Pour évaluer l'ordre de grandeur des effets qu'on peut obtenir, remarquons qu'une bande indéfinie de largeur b et de densité σ, mobile dans sa direction avec une vitesse u, équivaut à un courant dont l'intensité électro-magnétique est $\frac{u\sigma}{a}b$. Si on la suppose placée à la distance e d'une autre bande semblable, et qu'on charge le condensateur ainsi formé à un potentiel électrostatique V, on aura (74)

$$\sigma = \frac{V}{4\pi e}.$$

Or, on peut obtenir avec les machines électriques des potentiels équivalents à 100,000 couples Daniell, c'est-à-dire environ 10^5 volts ou $10^5.10^8$ unités C.G.S. Avec de pareilles machines, on aura donc, en unités électrostatiques,

$$V = \frac{10^5.10^8}{a} = \frac{10^{13}}{3.10^{10}} = 333,$$

ce qui donne sensiblement $\sigma = \frac{30}{\ }$.

Si l'on suppose $b = 10$ et $c = 1$, l'intensité électromagnétique du courant sera

$$I = \frac{u.300}{3.10^{10}} = \frac{u}{10^8} \text{ C.G.S.}$$

Comme un volt dans un circuit de n ohms donne un courant d'intensité

$$I' = \frac{1}{10n} \text{ C.G.S.},$$

on voit que la vitesse qu'il faudra donner à la bande, pour obtenir le même courant, sera

$$u = \frac{10^7}{n} = \frac{100000}{n} \text{ mètres.}$$

Il faut remarquer que le courant I, produit par le mouvement d'un corps électrisé, est beaucoup plus difficile à constater que celui d'un couple électrique ordinaire, parce qu'il faudra le faire agir directement sur l'aiguille et sans effet de multiplication.

M. Rowland a vérifié, par expérience, que la rotation d'un disque électrisé produit un effet sensible sur une aiguille aimantée, et que l'action est de même ordre que celle qui serait indiquée par les considérations qui précèdent.

CHAPITRE DIXIÈME

THÉORIES GÉNÉRALES

618. Idées d'Ampère. — Pour établir la formule élémentaire des actions électrodynamiques, Ampère s'est appuyé seulement sur l'hypothèse des forces centrales et sur certains faits d'expérience, sans faire intervenir aucune vue particulière sur la nature même des courants électriques. Toutefois, dès l'année 1822, il « cherchait à rendre raison de la force « qui a lieu entre deux éléments de fils conducteurs par la réac- « tion du fluide répandu dans l'espace et dont les vibrations « produisent les phénomènes de la lumière. » Ampère indique encore une autre manière de concevoir les phénomènes : « Quand on suppose que les molécules électri- « ques, mises en mouvement dans les fils conducteurs par « l'action de la pile, y changent continuellement de lieu, s'y « réunissent à chaque instant en un fluide neutre, se séparent « de nouveau, et vont aussitôt se réunir à d'autres molécules « du fluide de nature opposée, il n'est plus contradictoire d'ad- « mettre que des actions en raison inverse des carrés des dis- « tances qu'exerce chaque molécule, il puisse résulter entre « deux éléments de fils conducteurs une force qui dépende « non seulement de leur distance, mais encore des directions « des deux éléments suivant lesquels les molécules électriques « se meuvent, se réunissent à des molécules de l'espèce opposée, « et s'en séparent l'instant suivant pour aller s'unir à d'autres. » (*Mémoires de l'Institut* pour 1823, p. 294 et 299.) Ampère n'a pas poursuivi le développement de ces idées; il ne pensait pas que le moment fût encore venu de le faire utilement.

Les hypothèses d'Ampère ont été reprises par différents physiciens, en particulier par Weber et par Maxwell; nous donnerons un exposé sommaire des théories proposées.

619. Formules de Gauss et de Weber. — Si l'on fait intervenir les actions réciproques des masses électriques qui circulent dans les conducteurs, il est nécessaire que l'action de deux masses électriques m et m' soit une fonction, non seulement de leur distance r, mais aussi de leur mouvement relatif, et le problème ainsi posé paraît indéterminé. Une des hypothèses consiste à admettre que cette action, tout en restant dirigée suivant la droite qui les joint, et proportionnelle au produit des masses et en raison inverse du carré de la distance, comprend un terme proportionnel à une puissance de la vitesse relative u des deux masses et un autre terme proportionnel à une puissance de leur vitesse relative $\frac{dr}{dt}$ parallèlement à leur distance. Ces puissances doivent être paires, si l'on veut que l'action ne soit pas modifiée quand on change à la fois le sens des deux mouvements, comme pour les courants eux-mêmes, et on satisfait au problème en les prenant égales à 2, ce qui donne la loi élémentaire

$$(1) \qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1+\alpha u^2+\beta\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Weber a examiné d'abord les cas simples de deux éléments situés sur le prolongement l'un de l'autre ou perpendiculaires à une même droite. Dans le premier cas, il faut admettre que l'action de deux masses renferme un terme qui dépend de leur vitesse relative, et il a supposé que ce terme était proportionnel au carré de la vitesse. Le second cas conduisit Weber à faire intervenir l'accélération suivant la même droite, et l'hypothèse la plus simple était d'admettre que ce nouveau terme est proportionnel à l'accélération. Il en résulte une autre loi élémentaire

$$(2) \qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1+\alpha'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\beta'\frac{dr^2}{dt^2}\right].$$

Il reste à déterminer les coefficients α, β, α' et β' qui entrent dans ces deux expressions (1) et (2).

620. — Considérons d'abord deux mobiles qui se meuvent respectivement sur deux courbes fixes s et s', avec des vitesses constantes v et v'. Lorsque les deux mobiles parcourent les éléments ds et ds', situés à la distance r et faisant entre eux l'angle ε, on a

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2,$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad v' = \frac{ds'}{dt}.$$

On en déduit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}.$$

Si l'on suppose que les deux courbes s et s' sont le siège de courants d'intensités I et I', l'action des éléments ds et ds' est, d'après la formule d'Ampère (**351**), et en considérant la force comme répulsive,

$$(3) \qquad -\frac{2\mathrm{II}'ds\,ds'}{r^2}\left[\cos\varepsilon + \frac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] = \frac{2\mathrm{II}'ds\,ds'}{r^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

621. — Supposons maintenant que l'élément ds contienne des masses électriques m et m_1, animées respectivement des vitesses v et v_1, et que l'élément ds' renferme, de même, des masses m' et m'_1 avec les vitesses v' et v'_1. Si on évalue les actions des masses m et m_1 sur les masses m' et m_1 d'après les formules (1) et (2), la résultante devra reproduire la loi d'Ampère, sous l'une ou l'autre des deux formes (3), et, par suite, ne renfermer que les termes dans lesquels le produit vv' des vitesses est en facteur.

Les termes qui renferment les carrés des vitesses sont, à un facteur près,

$$(mv^2 + m_1 v_1^2)(m' + m'_1), \quad \text{et} \quad (m'v'^2 + m'_1 v_1'^2)(m + m_1).$$

Pour que ces termes soient nuls, il faut qu'on ait

$$(4) \qquad mv^2 + m_1 v_1^2 = 0, \quad \text{ou} \quad m' + m'_1 = 0.$$

Ces deux conditions sont réalisées à la fois, si l'on admet, avec Weber, qu'un courant électrique d'intensité I est formé de deux courants d'électricités contraires, marchant avec la même vitesse v en sens opposés, et ayant chacun une intensité moitié moindre. Il est même nécessaire d'admettre que la somme algébrique des masses électriques qui existent dans chaque élément de courant pour l'état permanent est nulle, si l'on veut satisfaire à la condition (**203**) que la densité dans le conducteur soit nulle ; mais, sans rien préciser sur le rapport des masses électriques de signes contraires, il suffirait que la somme $mv^2 + m_1 v_1^2$ fût nulle dans chaque élément, c'est-à-dire qu'il s'y trouvât des masses électriques de signes contraires ayant la même force vive.

La quantité d'électricité qui traverse la section du premier conducteur pendant l'unité de temps est égale à $mv + m_1 v_1$; si l'on désigne par a le nombre d'unités électrostatiques que renferme l'unité électromagnétique, on a

$$(5) \qquad \begin{aligned} mv + m_1 v_1 &= a \mathrm{I} ds, \\ m'v' + m'_1 v_1 &= a \mathrm{I}' ds'. \end{aligned}$$

En admettant l'existence de courants égaux et opposés, ces équations deviendraient

$$(6) \qquad \begin{aligned} 2mv &= a \mathrm{I} ds, \\ 2m'v' &= a \mathrm{I}' ds'. \end{aligned}$$

Quand on évalue l'action des masses m et m_1 sur les masses m' et m'_1, les termes qui dépendent du produit des vitesses sont, avec la première hypothèse,

$$\frac{2\beta}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} (mv + m_1 v_1)(m'v' + m'_1 v'_1) - \frac{2\alpha}{r^2} (mv + m_1 v_1)(m'v' + m'_1 v'_1) \cos\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{2\mathrm{I}\mathrm{I}'ds\,ds'}{r^2}\left[a^2\alpha\cos\varepsilon-a^2\beta\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right];$$

et, avec celle de Weber,

$$2\frac{(mv+m_1v_1)(m'v'+m_1'v_1')}{r^2}\left[\alpha'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}+\beta'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{ds'}\right],$$

ou

$$\frac{2\mathrm{I}\mathrm{I}'ds\,ds'}{r^2}\left[a^2\beta'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}+a^2\alpha'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

Quant au terme indépendant du mouvement relatif, il est dans les deux cas égal à $\frac{(m+m_1)(m'+m_1')}{r^2}$. Ce terme doit être nul s'il y a dans chaque fil deux courants égaux et de sens contraires; sinon, il représenterait une action électrostatique entre les conducteurs, phénomène que l'expérience n'a pas constaté jusqu'à présent.

Pour satisfaire à la loi d'Ampère, il faut donc qu'on ait, dans le premier cas,

$$a^2\alpha=1,\qquad a^2\beta=-\frac{3}{2},$$

et, dans le second,

$$a^2\beta'=r,\qquad a^2\alpha'=-\frac{1}{2}.$$

Les expressions (1) et (2), qui donnent l'action élémentaire de deux masses électriques, deviennent alors

$$(1)'\qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1+\frac{1}{a^2}\left(u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right],$$

$$(2)'\qquad \frac{mm'}{r^2}\left[1+\frac{1}{a^2}\left(r\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)\right]=mm'\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a^2\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right].$$

622. — La première expression (1)', trouvée dans les manuscrits de Gauss, est incompatible avec le principe de la conservation de l'énergie, car elle conduirait à cette conséquence

qu'un système physique limité peut produire une quantité d'énergie indéfiniment croissante.

La formule de Weber, au contraire, est compatible avec ce principe. En effet, l'expression de la force (2)′ peut être considérée comme la dérivée par rapport à r, prise en signe contraire, de la fonction

$$(7) \qquad \psi = \frac{mm'}{r}\left[1 - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Le travail produit par la répulsion d'une masse fixe sur une masse mobile est égal à la différence $\psi_0 - \psi_1$ des valeurs de la fonction ψ relative à ces deux masses pour la position initiale et la position finale. La fonction ψ peut être considérée comme représentant l'énergie potentielle du système des deux masses : elle ne dépend que de leur distance et de leur vitesse relative suivant la droite r; elle reprend la même valeur lorsque l'une des masses décrit par rapport à l'autre un chemin fermé et reprend la même vitesse aux mêmes points.

Puisque l'induction est une conséquence de la loi d'Ampère et du principe de la conservation de l'énergie, la formule de Weber, qui satisfait également à ces deux conditions, doit donner l'induction.

623. — Cette formule permet aussi d'obtenir directement l'énergie potentielle relative de deux circuits fermés. En effet, si on remplace $\frac{dr}{dt}$ par sa valeur en fonction des vitesses des masses électriques, on trouve, dans l'hypothèse de Weber, que le potentiel d'un des éléments sur l'autre a pour expression

$$\psi(ds, ds') = -\mathrm{II}'ds\,ds'\,\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

L'énergie potentielle de deux circuits est donc

$$(8) \quad \mathrm{W} = -\mathrm{II}'\iint\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds\,ds' = \mathrm{II}'\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'.$$

C'est la formule de Neumann trouvée plus haut (**353**).

Lorsque les courants sont constants et parcourent des circuits de forme invariable, la résultante des actions exercées par l'un des courants sur une masse quelconque m' de l'autre est normale à sa trajectoire.

621. Phénomènes d'induction. — Supposons maintenant que les circuits se déplacent et que les intensités soient variables. La distance r, au lieu d'être, comme ci-dessus, fonction seulement de deux variables indépendantes s et s', est en outre une fonction du temps, et l'on a $r=\varphi(s,s',t)$. Pour une valeur donnée de t, la fonction φ représente la distance de deux éléments du circuit; si t est variable et que l'on considère s et s' comme des fonctions de t, la valeur de φ représente la distance de deux masses électriques en mouvement sur les conducteurs mobiles. Quant aux vitesses v et v', si le conducteur a une section constante, elles ne dépendent point de s et de s', en tant que variables indépendantes, puisque à chaque instant l'intensité a la même valeur en tous les points du circuit. On aura donc, pour la vitesse relative des deux masses,

$$\frac{dr}{dt}=v\frac{\partial r}{\partial s}+v'\frac{\partial r}{\partial s'}+\frac{\partial r}{\partial t};$$

et, en considérant les dérivées $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial r}{\partial s'}$, comme des fonctions de s et s' seulement, l'accélération relative sera

$$\frac{d^2r}{dt^2}=v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}+2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}+v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}+v\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}$$
$$+v'\frac{\partial v'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'}+\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

La vitesse $\frac{dr}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2r}{dt^2}$ sont relatives aux masses électriques, tandis que les termes $\frac{\partial r}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ du second membre sont relatifs aux distances de deux éléments des deux circuits.

L'action mécanique de ds sur ds' s'obtiendra, comme plus haut, en faisant la *somme* des actions que les masses de l'élément ds exercent sur celles de l'élément ds'. Avec la formule et l'hypothèse de Weber, on reconnaît aisément qu'il ne reste dans cette somme, comme précédemment, que les termes en vv', et avec les coefficients déjà trouvés. Il en résulte que, dans l'état variable, l'action mécanique est à chaque instant conforme à celle que donnerait la formule d'Ampère.

625. — La force électromotrice qui agit sur l'élément ds' est la force qui tend à séparer les masses égales et de signes contraires contenues dans cet élément, et à les entraîner en sens opposés. On en obtiendra la valeur en prenant la *différence* des actions exercées dans la direction de l'élément ds', sur chacune des masses qu'il contient, par les deux masses de l'élément ds. Or, quand on fait la somme des actions des deux masses $+m$ et $-m$ de l'élément ds sur l'une des masses m' de l'élément ds', les termes qui subsistent sont les termes en v, vv' et $\frac{dv}{dt}$, qui changent de signe en même temps que m. Parmi ceux-ci, les seuls qui resteront dans la différence finale sont ceux qui changent de signe avec la vitesse v, quel que soit d'ailleurs le signe de v'. Ces termes se réduisent à deux, l'un provenant de $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ et qui est $2v\,\frac{\partial r \partial r}{\partial s \partial t}$, l'autre provenant de $\frac{d^2r}{dt^2}$, qui est $\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}$.

La différence ainsi calculée est égale à

$$\frac{4mm'}{a^2r^2}\left[r\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} - v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right] = \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} - \mathrm{I}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right]ds\,ds',$$

en tenant compte des équations (6) et supposant l'intensité égale à l'unité dans l'élément ds'.

Il faut prendre la composante de cette action suivant ds' et, par suite, multiplier l'expression précédente par $\frac{\partial r}{\partial s'}$; en remarquant que l'on a

$$r\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} - \mathrm{I}\frac{\partial r}{\partial t} = r^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{I}}{r}\right),$$

la force électromotrice élémentaire devient

$$d^2E = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I}{r}\right) ds ds'.$$

La force électromotrice totale, produite dans le circuit s' par le circuit s, s'obtiendra en intégrant cette expression par rapport à s et à s'. Comme l'intensité I est seulement une fonction du temps, et que les limites de l'intégrale sont elles-mêmes indépendantes du temps, on peut écrire

$$(9) \qquad E = \frac{d}{dt} I \int\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} ds ds'.$$

On aura donc (**353**)

$$(10) \qquad E = -\frac{d}{dt} I \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds ds' = -\frac{d}{dt}(IM) = \frac{dQ}{dt},$$

ce qui donne l'expression générale (**518**) de la force électromotrice produite dans un circuit par un courant extérieur. On retrouverait, de même, les autres cas d'induction.

626. Différents essais de théorie. — De nombreuses tentatives ont été faites, à l'exemple de Weber, pour réunir dans une même théorie les phénomènes de l'électricité statique, les courants permanents et les effets d'induction, et pour établir un lien entre l'électricité, le magnétisme et la lumière.

Gauss a émis l'opinion que les actions électriques ne doivent pas se produire instantanément et qu'on doit trouver la clef des phénomènes électrodynamiques si l'on peut établir la loi de propagation des forces électriques.

Différents mathématiciens ont traité le problème dans cet ordre d'idées. On peut expliquer, par exemple, les phénomènes d'induction en admettant que le potentiel électrique se propage dans le milieu avec une certaine vitesse, qui serait la vitesse même de la lumière, d'après B. Riemann, ou d'un ordre tout différent, suivant la théorie de C. Neumann.

M. Betti assimile l'action des courants à celle d'un système d'aimants élémentaires, tangents en chaque point au contour des circuits et polarisés périodiquement en sens contraires, et il considère la force magnétique comme transmise dans le milieu avec une certaine vitesse.

M. Lorenz a montré, de son côté, qu'en ajoutant aux équations données par M. Kirchhoff sur les courants électriques des termes convenablement choisis, qui n'altèrent aucune conséquence expérimentale, on obtient une nouvelle série d'équations, qui indiquent une action de proche en proche entre les éléments du milieu, et un phénomène d'ondulation se propageant avec la vitesse de la lumière. Il arrive ainsi à des résultats tout à fait semblables à ceux que Maxwell avait déduits d'une théorie entièrement différente.

Dans le même ordre d'idées, M. Edlung a essayé de montrer que les phénomènes électriques, tant statiques que dynamiques, se laissent expliquer à l'aide d'un seul fluide qui, selon toute probabilité, n'est autre chose que l'éther.

M. Edlung admet que tous les corps à l'état neutre renferment une quantité normale d'éther, et qu'une électrisation, positive ou négative, correspond à une dose d'éther supérieure ou inférieure à la charge normale. Un corps électrisé dans un espace neutre ne subira aucune action, par raison de symétrie, quelle que soit sa charge électrique. On en déduit facilement que l'action de deux corps est proportionnelle à l'excès de leurs charges respectives sur les charges normales.

Un courant électrique n'est alors qu'un transport d'éther dans un sens déterminé; si l'on admet ensuite que l'action des deux masses dépend de leur vitesse et de leur accélération relative suivant la droite qui les joint, on arrive, par une marche analogue à celle de Weber, et en déterminant certains coefficients par l'identification des formules avec les résultats de l'expérience, à rendre compte des lois d'Ampère et des phénomènes d'induction.

Toutes les théories qui précèdent impliquent l'existence d'un milieu intermédiaire; car, si un effet mécanique quelconque, force ou potentiel, se transmet avec une vitesse finie d'une particule à une autre, il est nécessaire qu'un milieu de

structure convenable en ait été le siège pendant que cet effet a quitté la première particule et n'a pas encore atteint la seconde. Maxwell a fait intervenir directement les propriétés de ce milieu et il est parvenu à établir, entre les phénomènes électriques et les phénomènes lumineux, des relations numériques remarquables, conformes à l'expérience.

627. Théorie électromagnétique de la lumière. — Nous avons vu, à plusieurs reprises, combien les différents phénomènes d'électricité et de magnétisme sont favorables à la conception de Faraday, qui consiste à abandonner l'idée des actions à distance, et à considérer les forces comme transmises par les réactions élastiques d'un milieu intermédiaire. C'est une hypothèse analogue à celle qui sert de base aujourd'hui à la théorie physique de la lumière, mais il serait contraire à l'esprit scientifique d'imaginer ainsi autant de milieux différents qu'il y a de phénomènes à expliquer, comme on le faisait autrefois par les hypothèses distinctes du fluide calorifique, des fluides électriques et des fluides magnétiques.

Le grand problème que soulève la philosophie de la science est donc de connaître la constitution d'un milieu unique qui permette d'expliquer en même temps tous les phénomènes physiques. Si le calcul montre que les perturbations électromagnétiques se propagent, non seulement dans l'air, mais dans tous les corps, avec la vitesse de propagation de la lumière, la question aura déjà fait un grand pas, car il sera démontré que ce milieu existe et que, selon toute probabilité, les phénomènes électriques et lumineux ne sont que des manifestations différentes des propriétés dont il est doué. Telle est la conséquence de la théorie de Maxwell. L'action, découverte par Faraday, d'un champ magnétique sur la polarisation de la lumière qui la traverse sera une conséquence naturelle du lien que le milieu commun établit entre les deux ordres de phénomènes.

628. Équations générales. — Pour déterminer les conditions de propagation d'une perturbation électromagnétique dans un milieu, nous supposerons ce milieu en repos, c'est-à-dire soustrait à tout autre mouvement que celui qui résulte de la perturbation elle-même.

Les équations (11), (13) et (14) du n° 572 donnent

$$u' = u - \frac{\partial f}{\partial t},$$
$$4\pi f = KP,$$
$$u = Pc.$$

On en déduit

$$u' = cP - \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t},$$

équation qu'on peut écrire sous la forme symbolique

(11) $$u' = \left(c + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\right) P.$$

Le milieu étant immobile, les dérivées des coordonnées par rapport au temps sont nulles. Les équations (10) du n° 571 donnent alors

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

il en résulte

(12) $$4\pi u' = -\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right).$$

On a d'autre part, par les équations (12) du n° 572,

(13) $$4\pi u' = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

et les équations (2) du n° 567 donnent

$$\mu\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) - \Delta F = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta F,$$

en posant

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$
$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Si on substitue cette valeur dans l'équation (13), il vient

$$(14) \qquad 4\pi u' = \mu\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \Delta F\right).$$

En éliminant u' entre les équations (13) et (14) et répétant des opérations analogues pour les autres coordonnées, on obtient finalement

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \Delta F = 0,\\ &\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \Delta G = 0,\\ &\mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \Delta H = 0. \end{aligned}$$

Si on prend les dérivées partielles de ces équations, respectivement par rapport à x, y, z, et qu'on les ajoute, il vient

$$(16) \qquad \mu\left(4\pi c + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \Delta\psi\right) = 0.$$

Lorsque le milieu n'est pas conducteur, $c=0$, et la valeur de $\Delta\psi$, qui est proportionnelle à la densité de l'électricité libre, est indépendante du temps. Il reste alors $\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=0$, c'est-à-dire que Θ est une fonction linéaire du temps, ou une quantité constante. Ces deux fonctions Θ et ψ ne joueront donc aucun rôle dans les phénomènes dus aux perturbations périodiques.

629. Propagation des ondulations dans un diélectrique. — Dans le cas d'un diélectrique, les équations (15) peuvent donc se réduire à

$$(17) \qquad \begin{aligned} &K\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F = 0,\\ &K\mu\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = 0,\\ &K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \Delta H = 0. \end{aligned}$$

Ces équations définissent la manière dont les fonctions I varient avec le temps et, par suite, la propagation d turbations électromagnétiques ; elles ont la même fort celles qui déterminent les mouvements vibratoires d corps solide élastique.

La vitesse V de propagation d'un ébranlement est par l'expression

$$(18) \qquad V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

630. Ondes planes. — Supposons, en effet, qu'à un i les perturbations électromagnétiques constituent une plane perpendiculaire à l'axe de z. Le milieu sera pa par des ondes planes parallèles à la première, et tou quantités dont les variations déterminent ces ondes so lement des fonctions de z et de t, indépendantes de Les équations (2) du n° 587 deviennent alors

$$\mu X = \frac{G}{\partial z},$$
$$\mu Y = -\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\mu Z = 0.$$

Les équations analogues à (13) donnent, de même,

$$(19) \qquad \begin{aligned} 4\pi u' &= \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ 4\pi v' &= -\frac{\partial X}{\partial z} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ 4\pi w' &= 0. \end{aligned}$$

On voit déjà que la perturbation électrique est aussi d plan de l'onde et perpendiculaire à la perturbation él magnétique, car si l'on a $Y = 0$, c'est-à-dire si la perturl électromagnétique est parallèle à l'axe de x, on aura et la perturbation électrique sera parallèle à l'axe de y

Pour un milieu non conducteur, l'équation (12) et les relations analogues relatives aux autres coordonnées donnent

$$(20)\qquad \begin{aligned} 4\pi u' &= -K\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ 4\pi v' &= -K\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ 4\pi w' &= -K\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

il en résulte

$$(21)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, &\quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= V^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \frac{1}{K\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, & \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= V^2\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0; & \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

La dernière de ces équations a pour intégrale

$$(22)\qquad H = A + Bt,$$

expression dans laquelle A et B sont des fonctions de z. Cette quantité H est donc constante ou varie proportionnellement au temps. En tous cas, elle n'intervient pas dans la propagation des phénomènes périodiques.

Les deux premières équations ont pour intégrales des expressions de la forme

$$(23)\qquad \begin{aligned} F &= f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \\ G &= \varphi_1(z - Vt) + \varphi_2(z + Vt). \end{aligned}$$

Les valeurs de F et de G se composent de deux parties distinctes. La première ne change pas quand on fait successivement $z=0$, $t=0$, ou $z=V$ et $t=1$; elle représente une onde plane qui se meut parallèlement à l'axe des z avec une vitesse égale à V. La seconde représente également une onde plane qui se meut dans la direction opposée avec la même vitesse.

631. — Une perturbation magnétique, sous forme d'onde plane, produit donc deux ondes planes qui se propagent de part et d'autre avec la même vitesse.

et l'énergie électromagnétique

$$\frac{1}{8\pi\mu}(\mu^2\gamma^2) = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Ces deux expressions sont égales, car, si on multiplie les deux membres de la première des équations (21) par les facteurs égaux $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$, et qu'on intègre par rapport à t, on obtient

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = K\mu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2.$$

L'énergie totale du milieu dans lequel se propagent les ondes est donc moitié sous forme d'énergie électrostatique et moitié sous forme d'énergie électromagnétique.

Désignons par p chacune de ces énergies par unité de volume. En vertu de son état électrique (104), le milieu est soumis à une tension $\frac{p}{2}$ parallèle à l'axe des x et une pression de même valeur parallèlement aux axes des y et des z. En vertu de son état électromagnétique, le milieu est soumis aux mêmes effets, sauf qu'il faut remplacer l'axe des x par l'axe des y et inversement. Ces actions se détruisent dans le plan de l'onde et il reste normalement à ce plan une pression p égale à a moitié de l'énergie totale par unité de volume.

Un rayon de lumière produit donc dans un milieu une pression parallèle au sens de la propagation et exercerait une répulsion sur une lame de métal qu'il rencontrerait. Il est possible que cet effet intervienne pour une part dans le mouvement des radiomètres.

633. Vitesse de propagation de la lumière. — Le véritable contrôle de cette théorie est donc que, dans tous les milieux, la vitesse de propagation des perturbations magnétiques soit la même que la vitesse de la lumière.

Supposons d'abord que le milieu considéré soit de l'air. Le coefficient K serait égal à l'unité si l'on avait adopté les unités électrostatiques. Dans le système électromagnétique, la valeur de ce coefficient (608) est $\frac{1}{a^2}$.

Il en résulte

$$V = \frac{1}{\sqrt{K}} = a.$$

Ainsi la vitesse de propagation d'une perturbation électromagnétique dans l'air est égale au rapport des unités ; ce rapport doit donc être égal à la vitesse de propagation de la lumière. Or, l'expérience indique pour ces deux vitesses des valeurs qui diffèrent extrêmement peu de 300,000 kilomètres par seconde, et les travaux les plus récents s'accordent à donner des nombres d'autant plus voisins l'un de l'autre que les mesures ont été faites avec plus d'exactitude. Une pareille coïncidence ne peut être un effet du hasard, et la théorie ingénieuse de Maxwell trouve ainsi dans l'expérience une confirmation éclatante.

634. Pouvoir inducteur spécifique. — Considérons maintenant un milieu diélectrique dont l'indice de réfraction soit n et le pouvoir inducteur spécifique plus grand que celui de l'air. En désignant par V la vitesse de propagation de la lumière dans l'air et par V′ sa vitesse dans le milieu considéré, on a

$$nV' = V, \quad \text{ou} \quad n^2V'^2 = V^2.$$

D'autre part, la vitesse V″ de propagation des perturbations électromagnétiques s'obtiendra en remplaçant K par K′, ce qui donne

$$K'V''^2 = KV^2 = 1.$$

Pour que les vitesses V″ et V′ soient encore égales, il faut qu'on ait $n^2 = \frac{K'}{K}$.

Il résulte donc de cette théorie que le pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique, par rapport à celui de l'air, est égal au carré de son indice de réfraction.

Il se présente ici, pour la vérification expérimentale de cette conséquence, une difficulté qui tient à la dispersion des milieux réfringents. L'indice de réfraction étant variable avec la longueur d'onde, l'idée la plus naturelle est de consi-

dérer la valeur limite de l'indice, c'est-à-dire celle qui correspond à la plus grande longueur d'onde. Pour la paraffine, par exemple, les indices de réfraction des rayons lumineux extrêmes varient de 1,43 à 1,45, et les meilleures expériences montrent que le pouvoir inducteur spécifique est égal à 2,29, dont la racine carrée 1,51 n'est pas très éloignée de l'indice de réfraction. L'accord est beaucoup moins satisfaisant avec la plupart des diélectriques solides transparents, tels que les différentes espèces de verre, le spath d'Islande, le spath fluor et le quartz ; leur pouvoir inducteur spécifique est toujours plus élevé, quelquefois le double du carré de l'indice de réfraction. Il en est de même pour les huiles végétales et animales, d'après les expériences récentes de M. Hopkinson.

Pour les gaz, dont la réfraction est plus faible et la dispersion négligeable, la puissance réfractive $n^2 - 1$ est proportionnelle au poids spécifique, ou à la pression, si la température est constante; il doit en résulter que le pouvoir inducteur spécifique croît aussi proportionnellement à la pression, et par le même coefficient que la puissance réfractive. Cette conséquence paraît avoir été vérifiée par les recherches de M. Boltzmann.

Le contrôle de l'expérience ne peut donc pas être considéré comme suffisant pour confirmer la théorie ; mais on ne doit pas attacher trop d'importance à ce désaccord apparent, si l'on tient compte du fait que le pouvoir inducteur spécifique diminue d'une manière notable avec la durée de l'électrisation. Or, la période des oscillations électriques qu'il faut admettre pour expliquer les phénomènes lumineux est hors de toute proportion avec le plus court intervalle de temps que l'on puisse réaliser dans les expériences d'électricité.

Dans tous les cas, cette corrélation des propriétés optiques et électriques d'un milieu peut être considérée, au moins, comme une première approximation d'une théorie qui reste à préciser davantage.

635. Milieux anisotropes. — Pour étendre la théorie aux milieux anisotropes, il serait nécessaire, en toute rigueur, de connaître la relation qui existe entre la constitution moléculaire d'un milieu et ses propriétés électriques; mais, sans formuler aucune conception hypothétique, il suffit d'admettre

que le pouvoir inducteur spécifique du milieu n'est pas le même dans les différentes directions, en d'autres termes, que la force électromotrice, au lieu d'être proportionnelle au déplacement et dans la même direction, est liée au déplacement par un système d'équations linéaires, comme pour les phénomènes de dilatation calorifique.

Dans ce cas, il existe trois directions rectangulaires suivant lesquelles la force électromotrice est dans la direction du déplacement : en prenant ces directions pour axes de coordonnées, et appelant K_1, K_2 et K_3 les trois valeurs principales du pouvoir inducteur spécifique, ou a, b et c les trois vitesses principales de propagation, on peut écrire

$$(24)\quad \begin{cases} 4\pi f = K_1 P = \dfrac{1}{a^2} P, \\ 4\pi g = K_2 Q = \dfrac{1}{b^2} Q, \\ 4\pi h = K_3 R = \dfrac{1}{c^2} R. \end{cases}$$

Dans un milieu non conducteur, dont la densité électrique est constante en chaque point, les équations générales de propagation (15) deviennent alors

$$(25)\quad \begin{cases} K_1 \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ K_2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \Delta G - \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} = \dfrac{1}{b^2} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \\ K_3 \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \Delta H - \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \end{cases}$$

En désignant par l, m et n les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à une onde plane qui se propage avec la vitesse V, on peut écrire

$$lx + my + nz - Vt = w.$$

Représentons par F″, G″, H″ les dérivées secondes par rapport à w des différentes fonctions F, G, H; les équations (25) deviennent

$$(26)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{V^2-a^2}{a^2}+l^2\right)F''+l(mG''+nH'')=0,\\ &\left(\frac{V^2-b^2}{b^2}+m^2\right)G''+m(nH''+lF'')=0,\\ &\left(\frac{V^2-c^2}{c^2}+n^2\right)H''+n(lF''+mG'')=0. \end{aligned}$$

En éliminant les fonctions F″, G″ et H″ entre ces trois équations, on obtient

$$(27)\quad \frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0.$$

C'est une équation de même forme que celle qui détermine la vitesse de propagation de la lumière dans les milieux réfringents à deux axes. Elle donne, pour une direction quelconque, deux vitesses correspondant à deux ondes distinctes qui se propagent dans le même sens. Si l'onde est, par exemple, perpendiculaire à l'axe de x, on a $m=0$, $n=0$, et les valeurs de la vitesse sont b et c.

636. — Si le milieu est symétrique par rapport à un axe, par exemple l'axe de x, les deux vitesses b et c sont égales et l'équation (27) se réduit à

$$l^2(V^2-b^2)^2+(1-l^2)(V^2-a^2)(V^2-b^2)=0.$$

Pour une onde perpendiculaire à l'axe, $l=1$; il n'y a alors qu'une vitesse de propagation, $V=b$, quelle que soit la direction des ébranlements électriques et magnétiques dans le plan de l'onde. Si l'onde est parallèle à l'axe, $l=0$, et l'on a deux vitesses de propagation, $V=a$ et $V=b$. L'onde qui se propage avec la vitesse b a le caractère de l'onde ordinaire dans les phénomènes d'optique, et correspond à une perturbation électrique perpendiculaire à l'axe. Comme cette onde est polarisée dans le plan de l'axe et du rayon, on voit que le plan de

[illegible] perturbation [illegible].

[illegible] — [illegible] milieu est [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] transforme [illegible] [illegible] [illegible] affaiblit [illegible].

[illegible] une onde plane [illegible] [illegible] perturbation [illegible] parallèle à l'axe de [illegible]. Les équations [illegible] donnent donc

[illegible]

L'intégrale est une fonction de la forme

[illegible]

les coefficients devant satisfaire aux conditions

[illegible]

Cette expression représente une onde, qui se propage parallèlement à [illegible] avec une vitesse V égale à [illegible], et dont l'amplitude [illegible] régulièrement.

Le coefficient d'absorption p a pour valeur [illegible] V. L'absorption de la lumière doit donc augmenter avec la conductibilité électrique. L'expérience indique, en effet, que la plupart des corps transparents sont diélectriques, et que tous les bons conducteurs sont très opaques.

Toutefois cette relation n'est pas absolue, car certains métaux sont transparents sous une faible épaisseur et plusieurs diélectriques sont opaques. On doit mettre à part les électrolytes qui sont presque tous transparents, car la décomposition qui accompagne le passage de l'électricité change complète-

ment la nature du phénomène, et on ne se trouve plus en présence d'un simple effet de conductibilité.

628. Corps conducteurs. — Considérons enfin un milieu isotrope conducteur, ou du moins un milieu dans lequel les phénomènes de conduction soient dominants par rapport à ceux du déplacement électrique. Si on néglige alors dans les équations (15) les termes qui renferment le facteur K, ainsi que les fonctions Θ et ψ, il vient

$$(29)\qquad \begin{aligned} 4\pi c \frac{\partial F}{\partial t} &= \Delta F, \\ 4\pi c \frac{\partial G}{\partial t} &= \Delta G. \\ 4\pi c \frac{\partial H}{\partial t} &= \Delta H. \end{aligned}$$

Chacune de ces équations a la même forme que celle qui donne la diffusion de la chaleur dans la théorie de Fourier.

En effet, si on appelle k, comme on l'a fait plus haut (70), le coefficient de conductibilité calorifique d'un milieu isotrope, et si l'on considère la fonction F comme désignant la température en chaque point, l'expression $k\Delta F$ représente le flux de chaleur qui pénètre pendant l'unité de temps dans l'unité de volume ; $\frac{\partial F}{\partial t}$ est l'élévation correspondante de température, de sorte que le coefficient $4\pi ck$ est la capacité calorifique du milieu par unité de volume.

Les propriétés électromagnétiques, une fois établies dans un milieu, éprouvent donc une diffusion analogue à celle de la chaleur ; mais on doit remarquer que le coefficient k de conductibilité du milieu qui produirait la même diffusion calorifique est en raison inverse de c. La diffusion des effets électromagnétiques est donc en raison inverse de la conductibilité électrique, de sorte qu'un milieu doué d'une conductibilité parfaite opposerait un obstacle absolu à cette diffusion.

Considérons, par exemple, le cas d'un courant linéaire entouré d'un milieu conducteur. Au moment où on établit le courant principal, le courant induit dans le milieu qui l'entoure a la même intensité, et leur action sur un point éloigné

est nulle; le régime ne s'établit qu'après l'extinction des courants induits par la résistance du milieu. Mais, à mesure que le courant induit s'affaiblit, il produit autour de lui un courant de même sens, de sorte que l'espace occupé dans le milieu par le courant induit s'agrandit de plus en plus, à mesure que l'intensité diminue.

Si le courant principal est maintenu constant, les courants induits se diffusent graduellement; quand le régime permanent est atteint, les valeurs de ΔF, ΔG et ΔH sont nulles dans tout le milieu et ne conservent de valeurs finies que dans la portion occupée par le circuit du courant.

639. Polarisation rotatoire magnétique. — La théorie ordinaire des ondulations admet que les phénomènes lumineux sont produits par les vibrations de l'éther; mais on doit reconnaître qu'une interprétation aussi formelle dépasse la portée des expériences. On ignore, en réalité, quelle est la nature même de la lumière. La seule chose qui puisse être considérée comme démontrée, c'est que, dans un rayon de lumière, il y a un effet mécanique de la nature d'un vecteur en géométrie, c'est-à-dire caractérisé par une grandeur et une direction; cette direction est normale au rayon, et elle varie périodiquement dans un même plan lorsque le rayon est polarisé. C'est la conséquence des phénomènes d'interférence.

Dans le cas d'un rayon polarisé circulairement, la grandeur de cet effet mécanique, de ce vecteur, reste constante, mais sa direction tourne autour du rayon et effectue une révolution complète pendant chaque période. Lorsqu'un pareil rayon traverse un milieu sous l'action d'une force magnétique, sa vitesse de propagation est modifiée; on en doit conclure qu'il existe dans le milieu quelque mouvement rotatoire dont l'axe est parallèle à la direction des forces magnétiques. Cette rotation ne s'applique à aucune portion finie du milieu, prise comme un ensemble, et l'on doit concevoir qu'elle est limitée aux moindres particules du corps, dont chacune tourne autour d'un axe qui lui est propre. C'est l'hypothèse (**601**) des tourbillons moléculaires (*vortices*).

Maxwell a expliqué ainsi les phénomènes de polarisation rotatoire magnétique par l'idée des tourbillons moléculaires;

mais, sans entrer dans l'exposé de cette théorie, on peut arriver au même résultat, comme l'a montré M. Rowland, en faisant intervenir une action nouvelle découverte par M. Hall.

640. Phénomène de Hall. — Soit ABCD (fig. 127) un conducteur en forme de croix taillé dans une feuille métallique très mince, une feuille d'or, par exemple ; les deux extrémités A et B de la branche principale sont en communication avec

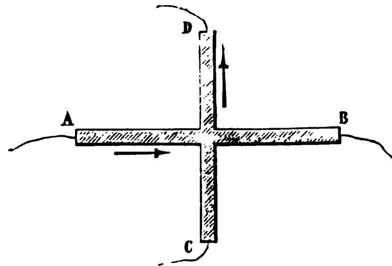


Fig. 127

les pôles d'une pile, les extrémités C et D de la branche transversale en communication avec un galvanomètre. On arrive facilement à disposer l'appareil de manière qu'aucune portion du courant ne traverse le galvanomètre.

Quand on place ce conducteur dans un champ magnétique très intense, de manière que les lignes de force soient perpendiculaires à son plan, une déviation permanente de l'aiguille montre qu'un courant constant traverse le galvanomètre. Si le courant va de A en B dans la branche principale, et que les lignes de force traversent d'avant en arrière le plan de la figure, le courant dérivé va de D en C à travers le galvanomètre, lorsque le conducteur est formé d'une feuille d'or, d'argent, de platine ou d'étain, et en sens contraire lorsque le métal est du fer. L'action cesse d'être appréciable quand on augmente l'épaisseur des conducteurs.

Dans le premier cas, le courant est entraîné dans le sens de la force électromagnétique qui s'exercerait sur un fil parallèle à AB et traversé par un courant de A en B ; on peut dire qu'il en est encore de même dans le second cas, puisqu'à l'intérieur d'une lame de fer, par suite de l'aimantation, le sens

des lignes de force et la direction de la force électromagnétique ont changé de signe.

Ainsi interprété, le phénomène de Hall serait en contradiction avec l'opinion généralement adoptée que, dans les phénomènes électromagnétiques, l'action s'exerce sur les *supports* des courants et non sur le courant lui-même. Mais, de quelque manière qu'on explique l'expérience, il en résulte qu'un champ magnétique à l'état stationnaire développe une force électromotrice qui tend à entraîner l'électricité dans le sens de l'action électromagnétique, c'est-à-dire vers la gauche d'un observateur placé dans le courant et qui regarde dans la direction de la force magnétique.

Comme l'effet dont il s'agit est très petit, l'hypothèse la plus naturelle, vérifiée d'ailleurs approximativement par les expériences de M. Hall, est d'admettre qu'il est proportionnel à la force électromagnétique.

611. Équations générales. — Soient A, B, C les composantes de cette force électromotrice nouvelle, et supposons qu'il s'agisse d'un milieu magnétique. La composante A, qui agit suivant l'axe des x, est la somme algébrique des deux actions exercées sur les composantes v' et w' du flux d'électricité suivant l'axe des y et suivant l'axe des z : la première est proportionnelle à $-Zv'$, et la seconde à Yw'. En désignant par γ le coefficient de proportionnalité, on aura donc

$$(30) \qquad \begin{aligned} A &= \gamma(Yw' - Zv'), \\ B &= \gamma(Zu' - Xw'), \\ C &= \gamma(Xv' - Yu'). \end{aligned}$$

Les composantes de la force électromotrice totale du champ deviennent alors

$$(31) \qquad \begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial t} + A, \\ Q &= -\frac{\partial G}{\partial t} + B, \\ R &= -\frac{\partial H}{\partial t} + C. \end{aligned}$$

Les équations (15) donnent, en introduisant les forces électromotrices nouvelles,

$$(32)\quad \mu\left(4\pi c+K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t}-A+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\Delta F=0, \text{ etc.}$$

Comme les fonctions ψ et Θ ne jouent pas de rôle dans les phénomènes périodiques, on aura donc, si le milieu n'est pas conducteur,

$$(33)\quad \begin{aligned} K\mu\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}-\frac{\partial A}{\partial t}\right)&=\Delta F,\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\frac{\partial B}{\partial t}\right)&=\Delta G,\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-\frac{\partial C}{\partial t}\right)&=\Delta H.\end{aligned}$$

612. Propagation d'une onde plane. — Considérons une onde plane perpendiculaire à l'axe des z. On n'aura à tenir compte que de la composante Z de la force magnétique parallèle à cet axe ; dans ce cas, si le champ est constant, les équations (33) se réduisent à

$$(34)\quad \begin{aligned} K\mu\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\gamma Z\frac{\partial v'}{\partial t}\right)&=\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\\ K\mu\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\gamma Z\frac{\partial u'}{\partial t}\right)&=\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},\\ K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}&=0.\end{aligned}$$

Les équations (2) et (12) des nos 567 et 572 donnent

$$\begin{aligned} 4\pi u'&=+\frac{\partial Y}{\partial z}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},\\ 4\pi v'&=-\frac{\partial X}{\partial z}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t},$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (34), il vient

$$(35) \qquad \begin{aligned} K\mu\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\gamma Z}{4\pi\mu}\frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial t}\right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ K\mu\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\gamma Z}{4\pi\mu}\frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial t}\right) &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Ces équations ont une solution de la forme

$$(36) \qquad \begin{aligned} F &= r\cos(pt - qz)\cos mt, \\ G &= r\cos(pt - qz)\sin mt. \end{aligned}$$

On déterminera les coefficients par la condition que les équations différentielles soient satisfaites pour toutes les valeurs de z et de t, ce qui donne

$$(37) \qquad \begin{aligned} &K\mu(p^2 + m^2) - q^2\left(1 + \gamma\frac{mZK}{4\pi}\right) = 0, \\ &2m\mu - \gamma\frac{Zq^2}{4\pi} = 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de F et de G sont les projections sur les axes d'une force électromotrice $r\cos(pt - qz)$, qui fait avec l'axe des x un angle mt proportionnel au temps.

613. Rotation du plan de polarisation. — Le phénomène représente donc un rayon de lumière qui se propage suivant l'axe des z avec une vitesse $V = \frac{p}{q}$, dont la période de vibra-

tion est $T = \frac{2\pi}{p}$; la longueur d'onde, c'est-à-dire l'espace parcouru pendant une période, est $\lambda = \frac{p}{q}\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{q}$.

Ce rayon est polarisé rectilignement ; mais le plan de polarisation tourne, comme dans un milieu actif, et la rotation complète s'effectue en un temps $\tau = \frac{2\pi}{m}$.

Les équations de condition (37) donnent

$$m = \frac{\gamma}{2\mu}\frac{Zq^2}{4\pi} = \frac{\pi\gamma Z}{2\mu\lambda^2},$$

$$V = \frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\sqrt{1 + \frac{mZK}{8\pi}} = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\sqrt{1 + \frac{K\mu m^2\lambda^2}{4\pi^2}}.$$

Comme le terme en γ est très petit, on peut prendre la racine carrée par approximation, et il vient finalement :

$$m = \gamma\frac{\pi Z}{2\mu\lambda^2},$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\left(1 + \frac{K\mu m^2\lambda^2}{8\pi^2}\right),$$

$$\tau = \frac{4\mu\lambda^2}{\gamma Z}.$$

Il en résulte les conséquences suivantes :

1° Lorsqu'un rayon polarisé se propage suivant la direction d'une ligne de force magnétique, le plan de polarisation tourne dans une direction qui dépend du signe de γ.

C'est le phénomène découvert par Faraday, avec l'inversion pour les corps magnétiques observée par Verdet.

2° La vitesse de propagation est augmentée par l'action électromagnétique ; mais cet effet est sans doute trop faible pour être mis en évidence.

Si l'on désigne par λ_0 et V_0 la longueur d'onde et la vitesse du rayon dans le vide, lorsqu'il est soustrait à l'action magnétique, et n l'indice de réfraction quand il passe dans le milieu

considéré, on a $n\lambda = \lambda_0$ et $nV = V_0$. Le temps que met ce rayon à parcourir une épaisseur e du milieu est $\frac{e}{V} = \frac{ne}{V_0}$; la rotation θ qu'éprouve le plan de polarisation a pour valeur

$$\theta = m\frac{e}{V} = \gamma e Z \frac{\pi n^3}{2\mu V \lambda^2},$$

et la rotation ω, pour une différence de potentiel égale à l'unité, devient

$$\omega = \gamma \frac{\pi n^3}{2\pi V \lambda^2}.$$

Si l'indice de réfraction était indépendant de la dispersion du milieu, la rotation du plan de polarisation serait en raison inverse du carré de la longueur d'onde, ce qui est la loi approchée de la rotation magnétique.

Nous avons vu (**597**) que, pour tenir compte de la dispersion, il suffit de multiplier ce résultat par le facteur $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$; il vient alors

$$\omega = \gamma \frac{\pi n^2}{2\mu V \lambda^2}\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right).$$

C'est, à part le facteur μ, la formule à laquelle était parvenu Maxwell par la théorie des tourbillons moléculaires, et celle qui s'accorde le mieux avec l'expérience. On voit que, toutes choses égales d'ailleurs, le pouvoir rotatoire est en raison inverse du coefficient de perméabilité μ.

CHAPITRE ONZIÈME

COMPLÉMENT

614. Conséquences du principe de Carnot. — Sir W. Thomson a montré que les principes qui servent de base à la théorie de la chaleur, c'est-à-dire le principe de la conservation de l'énergie et le principe de Carnot, permettent d'établir quelque propriétés importantes relatives aux phénomènes électriques et magnétiques.

Toutes les fois qu'un corps perd de la chaleur ou change de dimensions, malgré des forces extérieures qui tendent à le déformer en sens contraire, il effectue un travail. Quel que soit le cycle de transformations, le travail mécanique extérieur ne dépend que de l'état final et de l'état initial du corps. Dans tous les cas, ce travail mécanique ou calorifique correspond à une perte d'énergie du corps considéré.

L'énergie intrinsèque ou potentielle d'un corps est le travail total qu'il pourrait effectuer par un refroidissement indéfini et par une extension ou une contraction sans limites, suivant que les forces moléculaires sont répulsives ou attractives. Il n'existe aucun moyen d'évaluer cette énergie, ni même de savoir si elle est finie pour une masse limitée ; mais on peut mesurer les changements qu'elle éprouve à partir d'un état déterminé, pris comme *état normal*.

L'état mécanique d'un corps homogène qui a subi une déformation quelconque homogène, c'est-à-dire une déformation qui se reproduit de la même manière dans chaque élément du volume, peut être exprimé par six variables indépendantes, par exemple les longueurs des côtés et les valeurs des angles

d'un parallélipipède, ou les six éléments d'un ellipsoïde, qui renfermerait toujours la même portion du corps solide.

645. — L'énergie potentielle E d'un corps par unité de poids, à partir de son état normal, est une fonction de son état mécanique (forme et dimensions) et de sa température. Quand le corps éprouve une transformation quelconque, il absorbe une certaine quantité H d'énergie qui dépend de la déformation qu'il a subie et de la variation de température. Si l'une des variables seulement x a varié de dx et la température de dT, on peut écrire

$$(1) \qquad dH = a dx + l dT.$$

Les fonctions a et l ont une signification physique évidente. En les divisant par l'équivalent mécanique de la chaleur, la première représente la chaleur latente relative à la variable x, et la seconde l la chaleur spécifique pour un état mécanique constant.

Le travail dW effectué par les forces extérieures ne dépend que du changement de forme, et l'on a

$$dW = b dx.$$

L'accroissement d'énergie potentielle est la somme de ces deux expressions, ce qui donne

$$(2) \qquad dE = (a+b) dx + l dT.$$

Pour un cycle fermé quelconque, la variation totale d'énergie potentielle est nulle; la variation élémentaire doit donc être une différentielle exacte des variables indépendantes, ce qui donne la condition

$$(3) \qquad \frac{\partial(a+b)}{\partial T} = \frac{\partial l}{\partial x}.$$

Cette équation peut être considérée comme traduisant le principe de la conservation de l'énergie, ou l'équivalence mécanique de la chaleur.

646. — Pour appliquer le principe de Carnot, il est nécessaire que le cycle des transformations soit reversible et que l'état final du corps soit identique à l'état initial.

La somme des quotients de l'énergie calorifique absorbée par la température absolue correspondante est alors nulle, et l'on a

$$\int\frac{d\text{H}}{\text{T}}=\int\left(\frac{a}{\text{T}}dx+\frac{l}{\text{T}}d\text{T}\right)=0.$$

L'expression comprise entre parenthèses devant être aussi une différentielle exacte, il en résulte

$$(4)\qquad \frac{\partial a}{\partial \text{T}}-\frac{a}{\text{T}}=\frac{\partial l}{\partial x}.$$

Cette équation (4) peut être considérée également comme la traduction du principe de Carnot.

En comparant les équations (3) et (4), on en déduit

$$(5)\qquad \frac{a}{\text{T}}=-\frac{\partial b}{\partial \text{T}}.$$

On obtiendrait une équation analogue pour toute autre variable indépendante. Si on désigne par A la dérivée totale de l'énergie calorifique absorbée pour une transformation quelconque du corps à température constante, ce qui correspond à la chaleur latente relative à cette transformation, et par B la dérivée correspondante du travail extérieur, on aura donc

$$(6)\qquad \text{A}=-\text{T}\frac{\partial \text{B}}{\partial \text{T}}.$$

647. — On peut déduire de cette équation (6) les conséquences suivantes:

Toutes les fois que le travail extérieur a lieu dans un sens tel que la dérivée $\frac{\partial \text{B}}{\partial \text{T}}$ est négative, la valeur de A est positive.

En d'autres termes, quand la déformation produite par le travail extérieur est telle qu'une déformation de même nature pourrait être provoquée par un refroidissement du corps, ce travail est accompagné d'un dégagement de chaleur et, par conséquent, d'une élévation de température. L'inverse aurait lieu si la dérivée $\frac{\partial B}{\partial T}$ était positive. C'est ainsi qu'un gaz s'échauffe quand on le comprime, et qu'il se refroidit quand on le dilate.

Comme les corps solides se dilatent, en général, lorsque la température s'élève, on voit que la compression uniforme d'un corps solide produira aussi une élévation de température, et la décompression un refroidissement.

Il en est autrement pour les corps dont la dilatation est anormale, tels que l'eau à une température inférieure à 4° et l'iodure d'argent aux températures ordinaires. La compression de ces corps produirait un abaissement de température.

De même encore, un fil métallique tordu doit se refroidir quand on le tord davantage (si l'on admet comme certain que le coefficient de torsion diminue quand la température augmente). Un fil tordu doit aussi s'échauffer, indépendamment du travail extérieur produit, quand on le laisse se détordre.

Dans chaque cas, la quantité d'énergie absorbée ou dégagée H se déduit du travail extérieur et des propriétés du corps. Sans insister davantage sur les phénomènes purement calorifiques qu'on pourrait ainsi déduire du principe de Carnot, nous examinerons quelques conséquences de l'équation (6) relatives aux phénomènes électriques ou magnétiques.

648. Variations de température pendant l'aimantation. — Les relations que nous avons indiquées (432) entre les variations de température et les coefficients d'aimantation permettent de prévoir les résultats suivants :

1° Si l'on opère à une température inférieure au rouge, mais assez élevée pour que le coefficient d'aimantation du fer soit décroissant, un morceau de fer doux doit s'échauffer quand on l'approche lentement d'un aimant et se refroidir si on l'éloigne. Nous supposons que ces mouvements sont lents, afin d'éviter l'influence des courants d'induction.

L'inverse aurait lieu aux températures ordinaires, si le coefficient d'aimantation, comme il semble probable, croît avec la température.

2° Le cobalt doit se comporter comme le fer : se refroidir quand on l'approche d'un aimant à la température ordinaire, et s'échauffer, au contraire, si l'on opère à une température supérieure à celle du maximum d'aimantation.

3° Pour le nickel, il n'y a pas de maximum d'aimantation : à toute température, ce métal doit s'échauffer quand on l'approche, et se refroidir quand on l'éloigne d'un aimant.

D'une manière plus générale, le nickel et le cobalt aux températures ordinaires doivent se refroidir quand le mouvement exige un travail extérieur opposé à celui des forces magnétiques. Pour le nickel à une température quelconque, et pour les deux premiers métaux à des températures supérieures à celles du maximum d'aimantation, tout déplacement qui exige un travail opposé aux actions magnétiques produit, au contraire, un échauffement du corps.

4° Dans un champ magnétique, un cristal se refroidit quand son axe de plus grande induction magnétique, ou de plus petite induction diamagnétique, passe d'une direction parallèle à une direction perpendiculaire à celle du champ.

619. Échauffement électrique de la tourmaline. — Les phénomènes pyroélectriques donnent lieu à des considérations analogues.

La pyroélectricité des cristaux s'explique, dans les idées de Faraday (118), en admettant que le cristal est dans un état de polarisation électrique dont l'effet extérieur est équivalent à celui de deux couches, de masses égales et de signes contraires, distribuées sur la surface. Lorsque le cristal est à une température constante, le milieu qui l'entoure ne tarde pas à prendre, soit par sa conductibilité propre, soit par la surface du cristal lui-même, une électrisation superficielle qui fait équilibre à la première et annule son action sur tout point extérieur.

Lorsqu'on brise le cristal normalement à l'axe électrique, les deux fragments se montrent dans leur ensemble électrisés en sens contraires, non seulement par les couches nouvelles

que produit la polarisation sur les surfaces de la fracture, mais à cause aussi de l'électrisation induite sur les anciennes surfaces et dont l'équilibre est rompu.

Quand la température change, la polarisation électrique change aussitôt, mais l'équilibre produit par l'électrisation du milieu ambiant ne s'établit que par degrés, plus ou moins lentement, suivant la conductibilité du milieu ou de la surface du cristal.

Si cette explication de la pyroélectricité est exacte, il en résulte qu'un cristal pyproélectrique doit s'échauffer ou se refroidir quand on le déplace dans un champ électrique, comme le fer aimanté dans un champ magnétique.

La tourmaline s'échauffe si on la déplace de façon que l'influence du champ tende à augmenter sa polarisation intérieure, et se refroidit dans le cas contraire.

L'effet produit sur la tourmaline ne dépend pas de l'électrisation de la surface, et l'on arrive ainsi à ce résultat remarquable : un cristal pyproélectrique qui paraît à l'état naturel, ses propriétés étant neutralisées par l'électrisation du milieu, éprouve, quand on le déplace dans un champ, les mêmes variations de température que si ses propriétés électriques étaient apparentes, c'est-à-dire que s'il venait d'être porté à une température élevée, puis desséché et refroidi rapidement.

650. Principe de la conservation de l'électricité. — Toutes les fois qu'un système de corps, soustrait à toute communication extérieure, est le siège d'un phénomène électrique quelconque (*), la quantité totale d'électricité qu'il possède reste invariable. Ce principe se vérifie dans toutes les expériences, et il est une conséquence des vues émises par Maxwell sur la constitution des milieux qui servent à propager les forces électriques. Sans être en mesure d'affirmer que la quantité totale d'électricité qui existe dans la nature est rigoureusement nulle, on doit admettre, au moins, que les phénomènes physiques actuels n'y apportent aucun changement, et qu'elle reste constante, au même titre que la quantité totale d'énergie ou de matière. En d'autres termes, une quantité d'électricité peut être considérée comme indestructible par toute autre cause

que par une quantité égale d'électricité de signe contraire. M. Lippmann a montré que ce principe conduit à des conséquences analogues à celles du théorème de Carnot: quand on l'associe avec le principe de la conservation de l'énergie, on peut en déduire l'explication d'un certain nombre de phénomènes connus et, en outre, faire prévoir d'autres phénomènes non encore observés.

Supposons qu'un corps A parcoure dans un système un cycle fermé, c'est-à-dire qu'après avoir subi une série de transformations, il revienne à son état primitif, la somme des quantités dm d'électricité qu'il a reçues le long du cycle est nulle, de sorte que l'on a

$$\int dm = 0. \tag{7}$$

Cette condition exige que le gain élémentaire dm soit intégrable, c'est-à-dire la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes. Si le phénomène ne dépend que de deux variables x et y, ce qui est le cas le plus général, on peut écrire

$$dm = X dx + Y dy, \tag{8}$$

et la condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{9}$$

L'équation (9) peut être considérée comme la traduction du principe de la conservation de l'électricité ; nous en indiquerons, d'après M. Lippmann, quelques applications.

651. Phénomènes électrocapillaires. — M. Lippmann a reconnu (**270**) que les effets capillaires qui se manifestent entre le mercure et l'eau acidulée dépendent de la différence de potentiel des deux liquides, et qu'inversement la différence de potentiel des liquides est modifiée quand on change, par des forces extérieures, la grandeur de la surface de contact. Cette réciprocité des phénomènes est une conséquence du principe précédent.

Appelons S la surface de contact d'une masse de mercure avec l'eau acidulée, A la tension superficielle du liquide et x l'excès du potentiel de l'eau sur celui du mercure. Lorsque la surface pour une cause quelconque augmente de dS, le travail de la tension superficielle est — AdS.

Supposons maintenant qu'une quantité d'électricité dm, fournie par une source étrangère, arrive à la surface de l'eau; il en résultera un accroissement dx de la différence de potentiel, en même temps qu'une dilatation dS de la surface. Les quantités x et S sont alors les variables indépendantes du phénomène. Comme la masse dm est, toutes choses égales, proportionnelle à la surface, on peut écrire

$$dm = YSdx + XdS. \tag{10}$$

Le facteur X représente la capacité de l'unité de surface, à potentiel constant, et Y la capacité électrique de l'unité de surface, la surface restant constante et le potentiel variable. Le principe de la conservation de l'électricité donne déjà la condition

$$Y = \frac{\partial X}{\partial x}. \tag{11}$$

D'autre part, le travail électrique xdm, introduit dans le système, produit un accroissement d'énergie potentielle de la surface et un travail extérieur — AdS. Si on répète plusieurs fois l'opération en sens contraires, de manière à revenir à l'état initial, et qu'il n'y ait ni perte ni gain de chaleur, la variation d'énergie du système sera nulle, ce qui donne

$$\int (xdm + AdS) = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant dm par sa valeur,

$$\int [xYSdx + (A + xX)\, dS] = 0. \tag{12}$$

Comme cette expression doit être nulle pour tout circuit fermé, on a aussi

$$(13) \qquad xY = \frac{\partial(A + xX)}{\partial x}.$$

On déduit des deux équations (11) et (13)

$$X = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2};$$

et, par suite,

$$dm = -S\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}dx - \frac{\partial A}{\partial x}dS = -d\left(S\frac{\partial A}{\partial x}\right).$$

Les capacités X et Y sont donc des fonctions de la tension superficielle. Il en résulte que, si cette tension est une fonction de la différence de potentiel, comme l'indique l'expérience, la capacité X n'est pas nulle. Si on déforme la surface en maintenant constante la différence des potentiels, on doit donc, d'après l'équation (10), produire ou absorber de l'électricité ; et, si on opère à charge constante, on modifie la différence des potentiels. Les deux ordres de phénomènes sont corrélatifs, ce que l'expérience a confirmé.

652. Condensateurs à gaz. — M. Boltzmann a vérifié, conformément à la théorie de Maxwell (**631**), que la capacité d'un condensateur dont les deux armatures sont séparées par une couche de gaz, varie proportionnellement à la pression. Il doit en résulter, comme réciproque, que la pression d'une masse déterminée de gaz, située entre les armatures d'un condensateur, est une fonction de la différence de potentiel.

Les deux variables indépendantes, dont dépend ici le phénomène, sont la différence de potentiel x et la pression p du gaz. Quand l'armature positive reçoit une quantité dm d'électricité, on a

$$(14) \qquad dm = C\,dx + h\,dp.$$

Le facteur C représente la capacité du condensateur à pression constante, h un coefficient que l'expérience indique être

positif, puisque la capacité augmente avec la pression, et qui est déterminé par la théorie de Maxwell. Le principe de la conservation de l'électricité donne

$$(15) \qquad \frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Considérons maintenant un cycle fermé, sans variations de température. Le travail nécessaire pour augmenter de dm la charge de l'armature positive est égal à xdm ; d'autre part, une masse de gaz en contact avec le condensateur produit un travail extérieur pdv quand son volume augmente de dv. Si le gaz et le condensateur reviennent à leur état primitif, la variation d'énergie du système est nulle, et l'on a

$$(16) \qquad \int (xdm - pdv) = 0,$$

ce qui exige que l'expression comprise entre parenthèses soit une différentielle exacte.

Le volume v du gaz considéré est une fonction de la pression p et, peut-être aussi, de la différence du potentiel x; on posera donc

$$(17) \qquad dv = adx + bdp,$$

et la suite du raisonnement montrera si le coefficient a diffère de zéro. Comme cette expression est aussi une différentielle exacte, on en déduit

$$(18) \qquad \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

En substituant dans l'expression (16) les valeurs de dv et de dm, on obtient

$$\int [(Cx - ap)\,dx + (hx - bp)\,dp] = 0.$$

La condition d'intégrabilité est alors

$$(19) \qquad \frac{\partial (Cx - ap)}{\partial p} = \frac{\partial (hx - bp)}{\partial x}.$$

En tenant compte des équations (15) et (18), cette condition se réduit à

$$a = -h.$$

Le coefficient a est donc différent de zéro et négatif. Il en résulte, d'après l'équation (17), qu'à pression constante le volume d'une masse de gaz qui entoure un condensateur doit diminuer proportionnellement à la différence de potentiel des armatures. Ce résultat paraît avoir été vérifié par M. Quincke, au moins pour l'acide carbonique.

653. Dilatation électrique du verre. — Une bouteille de Leyde se dilate lorsqu'elle est électrisée et se contracte aussitôt qu'on la décharge. Ce phénomène, entrevu par Volta, a été mis en évidence par M. Govi, et M. Duter a montré que la dilatation du verre est proportionnelle au carré de la différence de potentiel des armatures. Considérons le phénomène sous la forme que lui a donnée M. Righi, c'est-à-dire un condensateur formé par un tube de verre dont les deux faces sont couvertes d'étain ; désignons par l sa longueur, et supposons qu'en même temps le tube soit soumis dans le sens de sa longueur à la tension exercée par un poids p.

Comme la longueur est une fonction de la différence de potentiel x et du poids tenseur p, on a

$$dl = a dx + b dp. \tag{20}$$

Le cofficient a est positif et mesure l'allongement électrique, et b est le coefficient d'élasticité du tube.

Si l'on admet que le tube n'éprouve pas de déformation permanente, il en résulte

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial x}. \tag{21}$$

D'autre part, il est à présumer que la charge du condensateur est aussi une fonction du poids tenseur, de sorte que l'on peut poser

$$dm = C dx + h dp, \tag{22}$$

C étant la capacité de la bouteille et h un coefficient que nous ne savons pas *à priori* être différent de zéro.

Le principe de la conservation de l'électricité donne

$$(23) \qquad \frac{\partial C}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

La variation d'énergie de la bouteille, pour un accroissement dm de la charge et un allongement dl, est

$$x\,dm + p\,dl = (Cx + ap)\,dx + (hx + bp)\,dp.$$

Comme cette expression doit être une différentielle exacte, on en déduit

$$(24) \qquad \frac{\partial(Cx + ap)}{\partial p} = \frac{\partial(hx + bp)}{\partial x},$$

ou, en tenant compte des équations (21) et (23),

$$h = a.$$

Il en résulte, d'après l'équation (22), qu'à potentiel constant, la charge électrique augmente avec le poids tenseur, et qu'à charge constante, le potentiel diminue quand le poids tenseur augmente, c'est-à-dire quand on allonge le tube.

L'expérience indique d'ailleurs que l'allongement est proportionnel au carré de la différence de potentiel, et qu'on a, en désignant par k une constante,

$$\Delta l = kx^2.$$

Il en résulte

$$a = \frac{\partial l}{\partial x} = 2kx = h,$$

et, d'après l'équation (23),

$$C = C_0 + 2kp.$$

La capacité électrique de la bouteille croît donc proportionnellement au poids tenseur.

On peut remarquer que l'attraction électrique des deux armatures d'un condensateur produirait aussi un écrasement de la couche intermédiaire et donnerait des effets analogues, mais il ne semble pas que cette cause suffise pour expliquer les phénomènes.

651. Compression de la tourmaline. — Nous appliquerons enfin la même analyse à un phénomène récemment découvert par MM. P. et J. Curie. Quand on comprime une tourmaline suivant l'axe, le cristal prend une polarisation électrique, de même sens que celle qui serait produite par une élévation de température. Cette polarisation est proportionnelle à la compression et disparaît avec elle. D'autres cristaux hémiédriques, tels que le quartz et la topaze, se comportent comme la tourmaline quand on les comprime suivant un axe d'hémiédrie.

Supposons que les bases d'un prisme de tourmaline soient couvertes de lames métalliques A et B, dont l'une B est en communication avec le sol, et dont l'autre A pourra être reliée avec des sources à potentiel constant.

On peut ainsi faire varier la pression p et le potentiel x de l'armature A en faisant parcourir au système un cycle fermé, et prendre ces deux quantités comme variables indépendantes. La quantité dm d'électricité reçue par la lame A a pour expression

$$dm = \mathrm{C}dx + h dp.$$

Le coefficient C est la capacité de l'armature A, à pression constante, et h est un coefficient négatif si l'extrémité A du cristal s'électrise positivement par la compression. Le principe de la conservation de l'électricité donne

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{25}$$

Appelant l la longueur du cristal, on posera aussi l'équation

$$dl = a dx + b dp, \tag{26}$$

dans laquelle b est le coefficient d'élasticité du cristal. Si l'on applique, comme plus haut pour la bouteille de M. Righi, le principe de la conservation de l'énergie, on en déduit

$$a = -h.$$

Comme la valeur de h est négative, l'équation (26) montre qu'une tourmaline s'allonge, quand on l'électrise de la même manière qu'elle le ferait par une élévation de température, et cet allongement est proportionnel au potentiel. Il en résulte un changement de structure et, sans doute aussi, une altération de propriétés optiques, analogue à celle qui a été observée par M. Kerr dans les corps transparents.

Puisque, d'après MM. Curie, l'électrisation est proportionnelle à la pression, le facteur h est constant ; par suite, la capacité d'un condensateur à lame de tourmaline est indépendante de la compression qu'on fait subir au cristal.

655. Généralisation de la loi de Lenz. — Dans tous les cas qui précèdent, le phénomène réciproque, dont l'existence est démontrée par le principe de la conservation de l'électricité, est de nature à s'opposer à la production du phénomène primitif. On retrouve ainsi, sous une forme générale, la loi de Lenz (**511**) relative aux phénomènes d'induction.

Ces quelques exemples suffiront à montrer comment les principes généraux de la science permettent de relier entre eux les phénoménes les plus variés, et même de déterminer leurs rapports numériques, sans qu'il soit nécessaire de connaître la nature intime des forces qui entrent en jeu.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTRICITÉ STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE DEUXIÈME

DU POTENTIEL

CHAPITRE TROISIÈME

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

CHAPITRE QUATRIÈME

ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE

CHAPITRE CINQUIÈME

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE SIXIÈME

DES DIÉLECTRIQUES

CHAPITRE SEPTIÈME

CAS PARTICULIERS D'ÉQUILIBRE

CHAPITRE HUITIÈME

SOURCES D'ÉLECTRICITÉ

DEUXIÈME PARTIE

COURANTS ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ DANS L'ÉTAT PERMANENT

CHAPITRE DEUXIÈME

RÉGIME VARIABLE

CHAPITRE TROISIÈME

ÉNERGIE DES COURANTS

CHAPITRE QUATRIÈME

COURANTS THERMOÉLECTRIQUES

TROISIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTITUTION DES AIMANTS

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

CHAPITRE QUATRIÈME

INDUCTION MAGNÉTIQUE

CHAPITRE CINQUIÈME

DES AIMANTS

CHAPITRE SIXIÈME

ÉTAT MAGNÉTIQUE DU GLOBE

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

COURANTS ET FEUILLETS MAGNÉTIQUES

CHAPITRE DEUXIÈME

ACTIONS ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

CHAPITRE QUATRIÈME

INDUCTION

CHAPITRE CINQUIÈME

CAS PARTICULIERS D'INDUCTION

CHAPITRE SIXIÈME

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

CHAPITRE SEPTIÈME

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION DANS LES CONDUCTEURS NON LINÉAIRES

CHAPITRE HUITIÈME

PHÉNOMÈNES OPTIQUES

CHAPITRE NEUVIÈME

UNITÉS ÉLECTRIQUES

CHAPITRE DIXIÈME

THÉORIES GÉNÉRALES

CHAPITRE ONZIÈME

COMPLÉMENT

1661-81. — Corbeil. Typ. et stér. Crété.

